靜宜大學 98 學年度第 1 學期企管系『統計學』期末考

【注意事項】本試卷共有 10 大題，每題值 10 分。請在答案卷上**依序作答**，需寫出計算過程，並請清楚以**劃雙底線**方式標明答案。（2010 年 1 月 20 日）

1. 陳老師準備將統計學成績，以 z 值法（調整前後有相同的 z 值）調整成平均數 70 分、標準差 15 分。

(a)某甲原始分數的 z 值爲 $z=1.2$ ，請計算其調整後的分數。

(b)若同學的原始成績爲常態分配，請計算調整後成績不及格的比率。

【解】

$$z=\frac{x-\mu}{\sigma},\quad x=\mu+z\times\sigma$$

(1a)

$$x=\mu+z\times\sigma=70+1.2\times15=88$$

(1b)

$$z=\frac{x-\mu}{\sigma}=\frac{60-70}{15}=-0.667$$

$$P(x<60)=P(z<-0.667)=0.5-0.2486=25.14\%$$

2. 若 X 爲 $n=100$ 、 $p=0.1$ 之二項分配，請計算 $P(X\le15)$ 。

（提示：注意 $\pm\frac{1}{2}$ 修正的問題。）

【解】

以 $\mu=np=10$ 、 $\sigma=\sqrt{np(1-p)}=3$ 之常態分配 Y 來近似。

$$P(X\le15)=P(Y\le15.5)=P\left(z\le\frac{15.5-10}{3}=1.833\right)=0.4664+0.5=0.9664$$

3. 設 $Z=2X+Y$ ，其中 X、Y 相互獨立，且 X 爲 $\mu=3$ 、 $\sigma=2$ 的常態分配，Y 爲 $\mu=2$ 、 $\sigma=3$ 的常態分配。

(a)請計算 $E(Z)$ 、 $V(Z)$ 。

(b)請計算 $\operatorname{cov}(X,Z)$ 。

【解】

(3a)

$Z=2X+Y$ 爲常態分配，X、Y 相互獨立，故 $\operatorname{cov}(X,Y)=0$ 。

$$E(Z)=E(2X+Y)=2E(X)+E(Y)=2\times3+2=8$$

$$V(Z)=V(2X+Y)=2^2\times V(X)+V(Y)+2\times2\times1\times\operatorname{cov}(X,Y)=4\times2^2+3^2=25$$

(3b)

$$X\times Z=X\times(2X+Y)=2X^2+XY$$

$$\operatorname{cov}(X,Z)=\operatorname{cov}(X,2X+Y)=2V(X)+\operatorname{cov}(X,Y)=2\times2^2=8$$

4. X 爲自由度 $df=(4,8)$ 的 F 分配。我們想找 X 在信賴度 $1-\alpha=95\%$ 下的信賴區間。

(a)請寫出其右尾臨界值。（提示：本項直接查表即可。）

(b)請寫出其左尾臨界值。（提示：本項查表後，需代入轉換公式計算。）

【解】

(4a)

右尾臨界值：$F_{\frac{\alpha}{2}=0.025,df=(4,8)}=5.0526$

(4b)

左尾臨界值：$F_{\frac{\alpha}{2}=0.975,df=(4,8)}=\dfrac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}=0.025,df=(8,4)}}=\dfrac{1}{8.9796}=0.1114$

5. 企管系二年級同學一共有160人，我們想估計這些同學晚餐的平均消費金額。今隨機抽取20位同學作爲樣本，得樣本平均數\$69.4、標準差\$18.2。假設母體爲常態分配，在 $1-\alpha=95\%$ 信賴水準下，請計算其最大容忍誤差 ε 。

（提示：注意有限母體的修正。）

【解】

$N=160$ 、 $n=20$ 、 $\bar{x}=69.4$ 、 $s=18.2$ 、 $1-\alpha=95\%\rightarrow t_{\frac{\alpha}{2}=0.025,df=19}=2.0930$ 。

$$\varepsilon=t\times\frac{s}{\sqrt{n}}\times\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}=2.0930\times\frac{18.2}{\sqrt{20}}\times\sqrt{\frac{160-20}{160-1}}=7.9927$$

6. 樣本 $X_1,\ldots,X_n$ 爲 i.i.d.，來自平均數 μ 、標準差 σ 的母體，若

$$Y_1=\frac{X_1+X_2+X_{n-1}+X_n}{4},\quad Y_2=\frac{X_1+2X_2+2X_{n-1}+X_n}{6}$$

請以相對有效性判斷 Y_1 、 Y_2 兩估計量哪一個比較好。

【解】

$$V(Y_1)=V\left(\frac{X_1+X_2+X_{n-1}+X_n}{4}\right)=\frac{1+1+1+1}{16}\sigma^2=\frac{1}{4}\sigma^2$$

$$V(Y_1)=V\left(\frac{X_1+2X_2+2X_{n-1}+X_n}{6}\right)=\frac{1+2^2+2^2+1}{36}\sigma^2=\frac{10}{36}\sigma^2$$

$V(Y_1)<V(Y_2)$ ，故 Y_1 相對有效於 Y_2 。

7. Suppose the average client charge per hour of out-of-court work by lawyers in the state of Iowa is \$125. Suppose further that a random telephone sample of 32 lawyers in Iowa is taken and that the sample average charge per hour for out-of-court work is \$110. Suppose that the population variance is \$525.

(a) What is the probability of getting a sample mean of \$110 or larger?

(b) What is the probability of getting a sample mean of between \$120 and \$130 per hour?

提示：前者求 $P(\bar{x} \ge 110)$，後者求 $P(120 \le \bar{x} \le 130)$。

【解】

基本資料：$\mu = 125$、$n = 32$、$\bar{x} = 110$、$\sigma^2 = 525$。

引伸資訊：$\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{525}}{\sqrt{32}} = 4.05$

這題需要假設母體爲常態，但 $n = 32$ 屬大樣本，$\bar{x}$ 可視爲常態分配。

(7a)

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{110 - 125}{4.05} = -3.704$$

$$P(\bar{x} \ge 110) = P(z \ge -3.704) = 1$$

(7b)

$$z_1 = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{120 - 125}{4.05} = -1.235, \quad z_2 = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{130 - 125}{4.05} = 1.235$$

$$P(120 \le \bar{x} \le 130) = P(-1.235 \le z \le 1.235) = 2 \times 0.3916 = 0.7832$$

8. A random sample of 35 items is taken, producing a sample mean of 2.364 with a sample variance of 0.81. Assume x is normally distributed and construct a 90% confidence interval for the population mean.

提示：本題求母體平均數之信賴區間。

【解】

基本資料：$n = 35$、$\bar{x} = 2.364$、$s^2 = 0.81$、$1 - \alpha = 90\%$。

引伸資訊：$s_{\bar{x}} = \dfrac{s}{\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{0.81}}{\sqrt{35}} = 0.1521$、$t_{\frac{\alpha}{2}=0.05, df=34} = z_{\frac{\alpha}{2}=0.05} = 1.645$（大樣本）

$$\varepsilon = z \times s_{\bar{x}} = 1.645 \times 0.1521 = 0.2502$$

$$C.I. = \{\bar{x} \pm \varepsilon\} = \{2.364 \pm 0.250\} = \{2.114 \le \mu \le 2.614\}$$

9. Determine the sample size necessary to estimate p for the following information:

(a) $\varepsilon = 0.2$, p is approximately 0.4, and confidence level is 90%;

(b) $\varepsilon = 0.04$, p is unknown, and confidence level is 95%.

提示：本題求最小樣本數。

【解】

樣本數：$n = \dfrac{z^2\sigma^2}{\varepsilon^2} = \dfrac{z^2 p\left(1-p\right)}{\varepsilon^2}$

(9a)

$1-\alpha = 90\% \rightarrow z = 1.645$

$n = \dfrac{z^2\sigma^2}{\varepsilon^2} = \dfrac{z^2 p\left(1-p\right)}{\varepsilon^2} = \dfrac{1.645^2 \times 0.4 \times \left(1-0.4\right)}{0.2^2} = 16.23 \doteq 17$（無條件進位）

(9b)

$1-\alpha = 95\% \rightarrow z = 1.96$ ，沒給 p 值，指定 $p = 0.5$

$n = \dfrac{z^2\sigma^2}{\varepsilon^2} = \dfrac{z^2 p\left(1-p\right)}{\varepsilon^2} = \dfrac{1.96^2 \times 0.5^2}{0.04^2} = 600.25 \doteq 601$（無條件進位）

10. According to a survey by Runzheimer International, the average cost of a fast-food meal (quarter-pond cheeseburger, large fries, medium soft drink, excluding taxes) in Seattle is \$4.82. Suppose this figure was based on a sample of 27 different establishments and the standard deviation was \$0.37. Construct a 95% confidence interval for the population mean cost for all fast-food meals in Seattle.

提示：本題求母體平均數之信賴區間。

【解】

基本資料：$\overline{x} = 4.82$ 、 $n = 27$ 、 $s = 0.37$ 、 $1-\alpha = 95\%$ 。

引伸資訊：$s_{\overline{x}} = \dfrac{s}{\sqrt{n}} = \dfrac{0.37}{\sqrt{27}} = 0.0712$ 、 $t_{\frac{\alpha}{2}=0.025, df=26} = 2.0555$

$\varepsilon = t \times s_{\overline{x}} = 2.0555 \times 0.0712 = 0.1464$

$C.I. = \left\{\overline{x} \pm \varepsilon\right\} = \left\{4.82 \pm 0.146\right\} = \left\{4.674 \le \mu \le 4.966\right\}$