

靜宜大學 96 學年度第 1 學期企管系『統計學』期末考

【注意】本試卷共有 11 題，每題值 10 分。(2008 年 1 月 11 日)

請就下列敘述回答 1、2 兩題：

某公司有三項產品，各項產品每月銷售量都呈現常態分配。A 產品的常態分配是 $N(\mu=100, \sigma=50)$ ，B 產品的常態分配是 $N(80,16)$ ，C 產品的常態分配是 $N(120,25)$ ，各項產品的銷售量彼此不會互相影響，亦即三者互相獨立。

1. 公司每月銷售量的標準差最接近下列何者？(A)8；(B)36；(C)60；(D)96；(E)256。
2. 每月銷售量低於 260 的機率最接近下列何者？(A)0.1；(B)0.3；(C)0.5；(D)0.7；(E)0.9。

【解】1 (C)、2 (B)

$$E(X_A + X_B + X_C) = E(X_A) + E(X_B) + E(X_C) = 100 + 80 + 120 = 300$$

$$\text{var}(X_A + X_B + X_C) = \text{var}(X_A) + \text{var}(X_B) + \text{var}(X_C) = 50^2 + 16^2 + 25^2 = 3381$$

$$\sigma_{X_A+X_B+X_C} = \sqrt{\text{var}(X_A + X_B + X_C)} = \sqrt{3381} = 58.2$$

$$Y = X_A + X_B + X_C \text{ 爲常態分配： } \mu_Y = 300, \sigma_Y = 58.2$$

$$P(Y \leq 260) = P\left(Z < \frac{260 - 300}{58.2} = -0.6885\right) = 0.2456 \quad (\text{查表})$$

請就下列敘述回答 3、4 兩題：

We are to construct a 95% confidence interval for the difference between the mean lifetimes of two kinds of light bulbs, given that a random sample of 40 light bulbs of the first kind lasted on the average 418 hours of continuous use and 50 light bulbs of the second kind lasted on the average 402 hours of continuous use. The population standard deviations are known to be $\sigma_1 = 40$ and $\sigma_2 = 32$.

3. 最大容忍誤差 ε 最接近下列何者？(A)6；(B)7；(C)8；(D)9；(E)10。
4. 母體平均數差 $\mu_1 - \mu_2$ 的信賴區間爲_____。

【解】3 (E)、4 $\{0.76 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 31.24\}$

$Y = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$ ，母體標準差已知，大樣本，可視為常態分配。

$$n_1 = 40, \bar{x}_1 = 418, \sigma_1 = 40, \quad n_2 = 50, \bar{x}_2 = 402, \sigma_2 = 32$$

$$\mu_Y = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 418 - 402 = 16, \quad \sigma_Y = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{40^2}{40} + \frac{32^2}{50}} = 7.7769$$

$$\Rightarrow Y \sim N(16, 7.7769)$$

$$\varepsilon = z_{1-\alpha/95\%} \sigma_Y = 1.96 \times 7.7769 = 15.24$$

$$CI = \{16 - 15.2 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 16 + 15.2\} = \{0.8 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 31.2\}$$

5. X 為 $\lambda=3$ 的卜瓦松分配，區間，臨界值為 4、9，求 α 。

【解】

查表得 $P(X \leq 3) = 0.6472$ 、 $P(X \leq 9) = 0.9989$ ，

$$P(4 \leq X \leq 9) = P(X \leq 9) - P(X \leq 3) = 0.9989 - 0.6472 = 0.3517$$

6. X 為自由度 (3,5) 的 F 分配。

(a) 右尾檢定，顯著水準 $\alpha = 0.05$ ，求拒絕區域。

(b) 信賴度 $1 - \alpha = 90\%$ ，求信賴區間。

【解】

$$(a) F_{\alpha=0.05, df=(3,5)} = 5.4095, R = \{X > 5.4095\}$$

$$(b) F_{\alpha=0.95, df=(3,5)} = \frac{1}{F_{\alpha=0.05, df=(5,3)}} = \frac{1}{9.0135} = 0.1109, CI = \{0.1109 \leq X \leq 5.4095\}$$

7. 一組 8 人的隨機樣本，調查大學畢業生第一份工作的月薪，發現平均 \$24,000，標準差為 \$6,000。請建立平均月薪在 95% 信賴度下的信賴區間。

【解】

$$n = 8, \bar{x} = 24,000, s = \$6,000, 1 - \alpha = 95\% \Rightarrow s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{6,000}{\sqrt{8}}$$

$$\text{最大容忍誤差 } \varepsilon = t_{\frac{\alpha}{2}=0.025, n=7} \times \frac{s}{\sqrt{n}} = 2.3646 \times \frac{6,000}{\sqrt{8}} = 5,016$$

$$CI = \{\$24,000 \pm \$5,016\} = \{\$18,984 \leq \bar{x} \leq \$29,016\}$$

8. 某研究調查同學對統計課的滿意度，經隨機訪問 16 位同學，結果有 12 位表示滿意，請寫出滿意度在 95% 信賴度下的信賴區間。

【解】

$$n = 8, \bar{p} = \frac{12}{16} = 0.75, 1 - \alpha = 95\% \Rightarrow \sigma_{\bar{p}} = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{0.75 \times 0.25}}{\sqrt{8}}$$

$$\text{最大容忍誤差 } \varepsilon = z_{\frac{\alpha}{2}=0.025} \times \frac{s}{\sqrt{n}} = 1.96 \times \frac{\sqrt{0.75 \times 0.25}}{\sqrt{8}} = 0.2122$$

$$CI = \{0.75 \pm 0.2122\} = \{0.5378 \leq \bar{p} \leq 0.9622\}$$

9. 某市調單位想瞭解單身住家每月的電費，假設他們要求信心水準 95% 以上，最大容忍誤差 \$10 以下，且根據以往的研究經驗，該類住家每月電費的標準差為 \$200。請計算該研究的最低樣本數。

【解】

$$\varepsilon = \$10, \sigma = \$200, 1 - \alpha = 95\% \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}=0.025} = 1.96$$

$$\text{最少樣本數 } n = \frac{z^2 \sigma^2}{\varepsilon^2} = \frac{1.96^2 \times 200^2}{10^2} = 1536.6 \doteq 1537$$

10. 樣本 $X_1, \dots, X_n$ 為 i.i.d., 來自平均數 μ 、標準差 σ 的母體, 若

$$\bar{x} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}, \quad s^2 = \frac{(X_1 - \bar{x})^2 + (X_2 - \bar{x})^2 + \dots + (X_n - \bar{x})^2}{n-1}$$

請驗證 $\bar{x}$ 是否為 μ 之不偏估計量。

【解】

$$E[\bar{x}] = E\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{E(X_1) + \dots + E(X_n)}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

故 $\bar{x}$ 為 μ 的不偏估計量。

11. 樣本 $X_1, \dots, X_n$ 為 i.i.d., 來自平均數 μ 、標準差 σ 的母體, 若

$$Y_1 = \frac{5X_1 + 3X_2 + X_{n-1} + X_n}{10}, \quad Y_2 = \frac{2X_1 + 3X_2 + 3X_{n-1} + 2X_n}{10}$$

請以相對有效性判斷 Y_1 、 Y_2 兩估計量哪一個比較好。

【解】

$$\begin{aligned} V(Y_1) &= V\left(\frac{5X_1 + 3X_2 + X_{n-1} + X_n}{10}\right) = \frac{(5^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2)}{100} \sigma^2 = \frac{36\sigma^2}{100} \\ V(Y_2) &= V\left(\frac{2X_1 + 3X_2 + 3X_{n-1} + 2X_n}{10}\right) = \frac{(2^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2)}{100} \sigma^2 = \frac{26\sigma^2}{100} \\ \Rightarrow \frac{V(Y_1)}{V(Y_2)} &= \frac{36\sigma^2/100}{26\sigma^2/100} = \frac{36}{26} > 1 \end{aligned}$$

故 Y_2 相對有效於 Y_1 。

z 分配機率表 $P(0 \leq z \leq z^*)$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767

二項分配左尾機率表

x \ p	n = 15				
	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8
0	0.0352	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.1671	0.0052	0.0005	0.0000	0.0000
2	0.3980	0.0271	0.0037	0.0003	0.0000
3	0.6482	0.0905	0.0176	0.0019	0.0000
4	0.8358	0.2173	0.0592	0.0093	0.0000
5	0.9389	0.4032	0.1509	0.0338	0.0001
6	0.9819	0.6098	0.3036	0.0950	0.0008
7	0.9958	0.7869	0.5000	0.2131	0.0042
8	0.9992	0.9050	0.6964	0.3902	0.0181
9	0.9999	0.9662	0.8491	0.5968	0.0611
10	1.0000	0.9907	0.9408	0.7827	0.1642
11	1.0000	0.9981	0.9824	0.9095	0.3518
12	1.0000	0.9997	0.9963	0.9729	0.6020
13	1.0000	1.0000	0.9995	0.9948	0.8329
14	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9648
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

卜瓦松分配左尾機率表

x	λ				
	2	3	4	5	6
0	0.1353	0.0498	0.0183	0.0067	0.0025
1	0.4060	0.1991	0.0916	0.0404	0.0174
2	0.6767	0.4232	0.2381	0.1247	0.0620
3	0.8571	0.6472	0.4335	0.2650	0.1512
4	0.9473	0.8153	0.6288	0.4405	0.2851
5	0.9834	0.9161	0.7851	0.6160	0.4457
6	0.9955	0.9665	0.8893	0.7622	0.6063
7	0.9989	0.9881	0.9489	0.8666	0.7440
8	0.9998	0.9962	0.9786	0.9319	0.8472
9	1.0000	0.9989	0.9919	0.9682	0.9161
10	1.0000	0.9997	0.9972	0.9863	0.9574
11	1.0000	0.9999	0.9991	0.9945	0.9799
12	1.0000	1.0000	0.9997	0.9980	0.9912
13	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9964
14	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9986
15	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995

t 分配右尾臨界值表

自由度	α				
	0.005	0.01	0.025	0.05	0.1
4	4.6041	3.7469	2.7764	2.1318	1.5332
5	4.0321	3.3649	2.5706	2.0150	1.4759
6	3.7074	3.1427	2.4469	1.9432	1.4398
7	3.4995	2.9980	2.3646	1.8946	1.4149
8	3.3554	2.8965	2.3060	1.8595	1.3968
9	3.2498	2.8214	2.2622	1.8331	1.3830

F 分配右尾臨界值表

n2 \ n1	$\alpha = 0.05$				$\alpha = 0.1$			
	2	3	4	5	2	3	4	5
2	19.0000	19.1643	19.2468	19.2964	9.0000	9.1618	9.2434	9.2926
3	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	5.4624	5.3908	5.3426	5.3092
4	6.9443	6.5914	6.3882	6.2561	4.3246	4.1909	4.1072	4.0506
5	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	3.7797	3.6195	3.5202	3.4530
6	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	3.4633	3.2888	3.1808	3.1075
7	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.2574	3.0741	2.9605	2.8833