

靜宜大學 95 學年度第 3 學期企管系『統計學』期末考

【注意】本試卷共有 13 題選擇或填充題，每題值 10 分。請在答案卷標明題號後，先寫上答案，然後於下一列寫說明或計算過程；答案與說明各佔一半題分。(2007 年 8 月 8 日)

請就下列敘述回答 1、2 兩題：

A fair die is labelled with **one face** showing a 1, **two faces** showing a 2, and **three faces** showing a 3. The die is tossed twice, and X_1 = the number on the top of the die on the first toss, X_2 = the number on the top of the die on the second toss.

1. $E(X_1)$ 最接近下列何者？(A)1.6；(B)1.8；(C)2.0；(D)2.2；(E)2.4。
2. 令 $Y = X_1 + X_2$ ，則 Y 的分配為_____。(請寫出其機率分配表)

【解】1 (E)、2 (如下)

X_1	$P(X_1)$
1	1/6
2	2/6
3	3/6

$$E(X_1) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{2}{6} + 3 \times \frac{3}{6} = \frac{14}{6} = 2.33$$

$P(X_1, X_2)$			
$X_1 \setminus X_2$	1	2	3
1	1/36	2/36	3/36
2	2/36	4/36	6/36
3	3/36	6/36	9/36

X_1	X_2	$Y = X_1 + X_2$	$P(Y)$		Y	$P(Y)$
1	1	2	1/36	⇒	2	1/36
1	2	3	2/36		3	4/36
1	3	4	3/36		4	10/36
2	1	3	2/36		5	12/36
2	2	4	4/36		6	9/36
2	3	5	6/36			
3	1	4	3/36			
3	2	5	6/36			
3	3	6	9/36			

請就下列敘述回答 3、4 兩題：

某公司有三項產品，各項產品每月銷售量都呈現常態分配。A 產品的常態分配是 $N(\mu = 100, \sigma = 20)$ ，B 產品的常態分配是 $N(80, 16)$ ，C 產品的常態分配是 $N(120, 25)$ ，各項產品的銷售量彼此不會互相影響，亦即三者互相獨立。

3. 公司每月銷售量的標準差最接近下列何者？(A)8；(B)36；(C)60；(D)96；(E)256。
4. 每月銷售量低於 260 的機率最接近下列何者？(A)0.1；(B)0.3；(C)0.5；(D)0.7；(E)0.9。

z 分配左尾機率表

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319

【解】3 (B)、4 (A)

$$E(X_A + X_B + X_C) = E(X_A) + E(X_B) + E(X_C) = 100 + 80 + 120 = 300$$

$$\text{var}(X_A + X_B + X_C) = \text{var}(X_A) + \text{var}(X_B) + \text{var}(X_C) = 20^2 + 16^2 + 25^2 = 1281$$

$$\sigma_{X_A + X_B + X_C} = \sqrt{\text{var}(X_A + X_B + X_C)} = \sqrt{1281} = 35.8$$

$Y = X_A + X_B + X_C$ 為常態分配： $\mu_Y = 300$ 、 $\sigma_Y = 35.8$

$$P(Y \leq 260) = P\left(z < \frac{260 - 300}{35.8} = -1.117\right) = 0.1313 \quad (\text{查表})$$

請就下列敘述回答 5、6 兩題：

We are to construct a 95% confidence interval for the difference between the mean lifetimes of two kinds of light bulbs, given that a random sample of 40 light bulbs of the first kind lasted on the average 418 hours of continuous use and 50 light bulbs of the second kind lasted on the average 402 hours of continuous use. The population standard deviations are known to be $\sigma_1 = 26$ and $\sigma_2 = 22$.

5. 最大容忍誤差 ε 最接近下列何者？(A)6；(B)7；(C)8；(D)9；(E)10。

6. 母體平均數差 $\mu_1 - \mu_2$ 的信賴區間為_____。

【解】5 (E)、6 $\{5.90 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 26.10\}$

$Y = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$ ，母體標準差已知，大樣本，可視為常態分配。

$$n_1 = 40, \quad \bar{x}_1 = 418, \quad \sigma_1 = 26, \quad n_2 = 50, \quad \bar{x}_2 = 402, \quad \sigma_2 = 22$$

$$\mu_Y = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 418 - 402 = 16, \quad \sigma_Y = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{26^2}{40} + \frac{22^2}{50}} = 5.1556$$

$$\Rightarrow Y \sim N(16, 5.156)$$

$$\varepsilon = z_{1-\alpha=95\%} \sigma_Y = 1.96 \times 5.1556 = 10.10$$

$$CI = \{16 - 10.1 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 16 + 10.1\} = \{5.90 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 26.10\}$$

7. Let Y_1 and Y_2 are two independent unbiased estimators of θ . The variance of Y_1 is the **twice** of the variance of Y_2 . You are to find constants c_1 and c_2 , so that $c_1 Y_1 + c_2 Y_2$ is an unbiased estimator with smallest possible variance for such a linear combination.. Which number in the following list is closest to the value of c_1 ? (c_1 值最接近下列何者)

(A) $\frac{1}{4}$; (B) $\frac{1}{3}$; (C) $\frac{1}{2}$; (D) $\frac{2}{3}$; (E) $\frac{3}{4}$

【解】7 (B)

已知 $E(Y_1) = E(Y_2) = \theta$; 又令 $V(Y_2) = \sigma^2$, 則 $V(Y_1) = 2\sigma^2$ 。

$Z = c_1Y_1 + c_2Y_2$ 不偏估計量的條件 :

$$E(c_1Y_1 + c_2Y_2) = \theta \Rightarrow c_1E(Y_1) + c_2E(Y_2) = c_1\theta + c_2\theta = \theta \Rightarrow c_1 + c_2 = 1$$

求 $V(c_1Y_1 + c_2Y_2) = c_1^2(3\sigma^2) + c_2^2\sigma^2 = 2c_1^2\sigma^2 + (1-c_1)^2\sigma^2$ 最小 :

$$\frac{d}{dc_1} [2c_1^2\sigma^2 + (1-c_1)^2\sigma^2] = 0 \Rightarrow 4c_1\sigma^2 - 2(1-c_1)\sigma^2 = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{3}$$

8. 有一學者想要利用大規模的電話訪問來調查民眾對今年國內房地產市場的預期，受訪者將被要求回答他們認為今年房地產價格上揚，還是房地產價格會持平或下修。若在 95% 信賴度下，最大容忍誤差訂為 1%，則其最低樣本數最接近下列何者？

(A) 1,000 ; (B) 1,200 ; (C) 1,500 ; (D) 2,000 ; (E) 2,500

【解】8 (E)

$$\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}^2 \times p(1-p)}{\varepsilon^2} \leq \frac{1.96^2 \times (\frac{1}{2})^2}{\varepsilon^2} = \frac{0.9604}{\varepsilon^2}$$

最大容忍誤差 $\varepsilon = 1\%$, 則 $n \geq \frac{0.9604}{0.01^2} = 9,604$

請就下列 F 機率分配表回答 9、10、11 三題：

F 分配右尾臨界值表

n1 \ n2	$\alpha = 0.05$				$\alpha = 0.025$			
	1	3	5	7	1	3	5	7
1	161.4476	215.7073	230.1619	236.7684	647.7890	864.1630	921.8479	948.2169
3	10.1280	9.2766	9.0135	8.8867	17.4434	15.4392	14.8848	14.6244
5	6.6079	5.4095	5.0503	4.8759	10.0070	7.7636	7.1464	6.8531
7	5.5914	4.3468	3.9715	3.7870	8.0727	5.8898	5.2852	4.9949
9	5.1174	3.8625	3.4817	3.2927	7.2093	5.0781	4.4844	4.1970
999999	3.8415	2.6049	2.2141	2.0096	5.0239	3.1161	2.5665	2.2876

9. $\chi_{\alpha=0.05, df=5}^2$ (自由度 5 之卡方分配、右尾、 $\alpha = 0.05$ 、求臨界值) 最接近下列何者？

(A) 6 ; (B) 7 ; (C) 8 ; (D) 9 ; (E) 10。

10. $t_{\alpha=0.025, df=5}$ (自由度 5 之 t 分配、右尾、 $\alpha = 0.025$ 、求臨界值) 最接近下列何者？

(A) 2 ; (B) 3 ; (C) 5 ; (D) 10 ; (E) 50。

11. X 為自由度 (7, 3) 的 F 分配。信賴度 $1 - \alpha = 95\%$, 其信賴區間為_____。

【解】9 (E)、10 (B)、11 $\{0.1698 \leq X \leq 14.6244\}$

$$\chi_{\alpha=0.05, df=5}^2 = df \times F_{\alpha=0.05, df=(5, \infty)} = 5 \times 2.2141 = 11.07$$

$$t_{\alpha=0.025, df=5} = \sqrt{F_{\alpha=0.05, df=(1, 5)}} = \sqrt{6.6079} = 2.57$$

$$F_{\alpha=0.025, df=(7,3)} = 14.6244 \quad F_{\alpha=0.975, df=(7,3)} = \frac{1}{F_{\alpha=0.025, df=(3,7)}} = \frac{1}{5.8898} = 0.1698$$

$$CI = \left\{ F_{\alpha=0.975, df=(7,3)} \leq X \leq F_{\alpha=0.025, df=(7,3)} \right\} = \{0.1698 \leq X \leq 14.6244\}$$

請就下列敘述回答 **12**、**13** 兩題：

令 $X_1, \dots, X_n$ 為互相獨立，參數 μ 、 σ 的常態分配 ($n \geq 5$)，已知

$$Y_1 = \left(\frac{n}{2} X_1 + \frac{n}{2} X_n \right) / n, \quad Y_2 = (5X_1 + 3X_{n-1} + 2X_n) / 10, \quad Y_3 = (8X_1 + 2X_2) / 10, \\ Y_4 = (3X_1 + 3X_2 + 4X_n) / 10, \quad Y_5 = (3X_1 + 7X_n) / 10$$

12. 下列何者為 μ 之最有效估計量？ (A) Y_1 ；(B) Y_2 ；(C) Y_3 ；(D) Y_4 ；(E) Y_5 。

13. 下列何者為 μ 之一致估計量？ (A) Y_1 ；(B) Y_2 ；(C) Y_3 ；(D) Y_4 ；(E) Y_5 。

【解】**12** (D)、**13** (沒有答案)

$$\text{Var}(Y_1) = \frac{1}{n^2} \left[\left(\frac{n}{2} \right)^2 \sigma^2 + \left(\frac{n}{2} \right)^2 \sigma^2 \right] = \frac{1}{2} \sigma^2$$

$$\text{Var}(Y_2) = \frac{1}{10^2} [5^2 \sigma^2 + 3^2 \sigma^2 + 2^2 \sigma^2] = \frac{38}{100} \sigma^2$$

$$\text{Var}(Y_3) = \frac{1}{10^2} [8^2 \sigma^2 + 2^2 \sigma^2] = \frac{68}{100} \sigma^2$$

$$\text{Var}(Y_4) = \frac{1}{10^2} [3^2 \sigma^2 + 3^2 \sigma^2 + 4^2 \sigma^2] = \frac{34}{100} \sigma^2$$

$$\text{Var}(Y_5) = \frac{1}{10^2} [3^2 \sigma^2 + 7^2 \sigma^2] = \frac{58}{100} \sigma^2$$

其中

$$Y_4 \text{ 爲最有效估計量，因 } \text{var}(Y_4) = \min \{ \text{var}(Y_1), \text{var}(Y_2), \text{var}(Y_3), \text{var}(Y_4), \text{var}(Y_5) \}$$

沒有任何一致估計量， $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}(Y_i) > 0, i = 1, \dots, 5$ 。