

第六章 假設檢定（考古題）

2006 年 8 月 21 日 最後修改

6.1（94-淡江-企管）單一樣本平均數假設檢定

3. 淡江汽車公司宣稱其所生產之汽車,每加崙的汽油平均可行駛至少 15 公里,且其標準差為 3 公里.現隨機抽出 36 輛汽車試驗,得其平均公里數為 13,則
- (1) 若顯著水準為 0.05,檢定淡江汽車公司之宣稱是否為真? (5 分)
 - (2) 若實際平均公里數為 13.5 時,檢定發生錯誤之機率為何? (5 分)
 - (3) 利用 p-value 回答(1)之問題. (5 分)
 - (4) 若顯著水準為 0.05,檢驗者希望實際平均公里數為 13.5,同時可忍受型二誤差的機率為 0.025,則應取多少輛汽車來試驗? (5 分)

【解】

(1)

基本資料：左尾, $\mu = 15, \sigma = 3, n = 36, \bar{x} = 13, \alpha = 0.05$, z 值法

(1) 虛無假設 $H_0: \mu \geq 15$

(2) 檢定統計量 $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

(3) 左尾、z 分配、 $\alpha = 0.05$ ，求得拒絕區域 $R = \{z < -1.645\}$

(4) 樣本檢定統計量值 $z = \frac{13-15}{3/\sqrt{36}} = -4 \in R$ ，拒絕 H_0

(5) 淡江汽車公司的汽車每加侖汽油的平均行駛里程不會高於 15 公里。

(2)

基本資料：左尾, $\mu = 15, \sigma = 3, n = 36, \alpha = 0.05, \mu' = 13.5$, 求 β 值

(1) 虛無假設 $H_0: \mu \geq 15$

(2) 檢定統計量 $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

(3) 左尾、z 分配、 $\alpha = 0.05$ ，求得拒絕區域 $R = \{z < -1.645\}$

(4) 新臨界值 $z' = \frac{\mu - \mu'}{\sigma/\sqrt{n}} + z^* = \frac{15 - 13.5}{3/\sqrt{36}} - 1.645 = 1.355$

$$\begin{cases} z^* = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \\ z' = \frac{\bar{x} - \mu'}{\sigma/\sqrt{n}} \end{cases} \Rightarrow z' = \frac{(\mu + z^* \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) - \mu'}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\mu - \mu'}{\sigma/\sqrt{n}} + z^*$$

其中 μ' 、 z' 分別為正確分配之母體平均數與臨界值

μ 、 z^* 分別為虛無假設分配之母體平均數與臨界值

(5)右尾、z 分配、臨界值 $z' = 1.355$ ，求得機率 $\beta = 0.0877$ 。

(3)

基本資料：左尾， $\mu = 15, \sigma = 3, n = 36, \bar{x} = 13$ ，p值法

(1)虛無假設 $H_0: \mu \geq 15$

(2)檢定統計量 $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

(3)樣本檢定統計量值 $z = \frac{13 - 15}{3/\sqrt{36}} = -4$

(4)左尾、z 分配、臨界值 $z^* = -4$ ，求得機率 $p\text{值} = 0.000032$

(5)若決策者的顯著水準高於 $p\text{值} = 0.000032$ ，則拒絕 H_0 。

(4)

基本資料：左尾， $\mu = 15, \sigma = 3, \alpha = 0.05, \beta = 0.025, \mu' = 13.5$ ，求n值

左尾、z 分配、 $\alpha = 0.05$ ，求得拒絕區域 $R = \{z < -1.645\}$ ($z^* = -1.645$)

右尾、z 分配、機率 $\beta = 0.025$ ，求得臨界值 $z' = 1.96$

$$z' = \frac{\mu - \mu'}{\sigma/\sqrt{n}} + z^* \Rightarrow 1.96 = \frac{15 - 13.5}{3/\sqrt{n}} - 1.645 \Rightarrow n = 51.98 \div 52$$

6.2 (91-淡江-國貿) 單一樣本平均數假設檢定

5. 假設福客多超商去年所有員工每週平均工作時數為 39.5 小時。今勞工局派員抽檢其中 5 名員工，得平均工作時數為每週 40.1 小時，標準差為 5.4 小時。問在母體為常態分配的前提下，請檢定福客多員工每週平均工作時數是否改變？並求其 P-Value 並下結論。 ($\alpha = 5\%$)。 <15%>

【解】(本題的檢定統計量應是 t 分配，題意要強迫改成 z 分配，才可查表求 p 值)

基本資料：雙尾， $\mu = 39.5, n = 5, \bar{x} = 40.1, s = 5.4$ ，p值法

(1)虛無假設 $H_0: \mu = 39.5$

(2)檢定統計量 $z = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$ (題目要我們強用 z 分配)

(3)樣本檢定統計量值 $z = \frac{40.1 - 39.5}{5.4/\sqrt{5}} = 0.2485$

(4)雙尾、z 分配、臨界值 $z^* = 0.2485$ ，求得機率 $p\text{值} = 0.8038$

(5)決策者的顯著水準 $\alpha = 0.05$ 低於 $p\text{值} = 0.8038$ ，故無法拒絕 H_0 。

6.3 (90-淡江-國貿) 單一樣本平均數假設檢定

5. 根據一項試車結果，甲汽車製造廠宣稱該廠新型 1000cc 小汽車可使每公升汽油平均至少行駛 25 公里。已知該型小汽車全體之標準差為 $\sigma=3$ 公里/公升。消基會想以統計方法檢定該汽車製造廠之宣稱，乃隨機抽取該廠新型 1000cc 小汽車 36 部試驗，得樣本數據資料 $\bar{x}=23.8$ 公里/公升。試：
- (1) 請寫出消基會所欲做之檢定假設。(6分)
 - (2) 若欲取顯著水準 $\alpha=0.02$ 以檢定(1)之假設，此檢定的危險域(critical region)為何?(5分)
 - (3) 請根據消基會之抽樣資料，且取顯著水準 $\alpha=0.02$ 以檢定(1)之假設，則檢定之結論為何?(6分)
 - (4) 上述的檢定問題中，若正確的平均行駛里程數為 $\mu=24$ 公里/公升，且檢定者希望有 80% 機會察覺 $\mu<25$ 公里/公升之結論，則樣本應抽多少才能滿足檢定者希望?(5分)

【解】

(1)(2)(3) 題中的危險域即我們的拒絕區域

基本資料：左尾， $\mu=25, \sigma=3, n=36, \bar{x}=23.8, \alpha=0.02$ ，z 值法

(1)虛無假設 $H_0: \mu \geq 25$ (左尾)

(2)檢定統計量 $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

(3)左尾、z 分配、 $\alpha=0.02$ ，求得拒絕區域 $R = \{z < -2.0537\}$

(4)樣本檢定統計量值 $z = \frac{23.8 - 25}{3/\sqrt{36}} = -2.4 \in R$ ，拒絕 H_0

(5)有充分證據顯示，甲汽車廠的宣稱是錯的。

(4)

基本資料：左尾， $\mu=25, \sigma=3, \alpha=0.02, 1-\beta=80\%, \mu'=24$ ，求 n 值

左尾、z 分配、機率 $\alpha=0.02$ ，求得臨界值 $z^* = -2.0537$

右尾(求 β 值是右尾)、z 分配、機率 $\beta=0.2$ ，求得臨界值 $z' = 0.8416$

$$z' = \frac{\mu - \mu'}{\sigma/\sqrt{n}} + z^* \Rightarrow 0.8416 = \frac{25 - 24}{3/\sqrt{n}} - 2.0537 \Rightarrow n = 75.44 \div 76$$

6.4 (94-逢甲-保險) 單一樣本平均數假設檢定

4. (15分) 某房屋仲介公司專案經理廣告宣稱營業區域內的市場狀況套房平均售價是\$250(萬元)。消費者聯盟為驗證該廣告的真實性，作一36個樣本的市場調查，經計算得樣本的平均售價\$268，樣本標準差\$60，且假設售價服從常態分配。
- (a) 在顯著水準為5%時，求檢定統計量，並驗證該公司廣告的真實性。
 - (b) 計算 p-值，可否以此說明(a)中的結論，若可請說明。
 - (c) 求套房平均售價的95%信賴區間，可否以此說明(a)中的結論，若可請說明。

【解】

(a)

基本資料：雙尾， $\mu = 250$ ， $n = 36$ ， $\bar{x} = 268$ ， $s = 60$ ， $\alpha = 0.05$ ， z 值法

(1)虛無假設 $H_0: \mu = 250$ (雙尾)

(2)檢定統計量 $z = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$ (大樣本 $n = 36$)

(3)雙尾、 z 分配、 $\alpha = 0.05$ ，求得拒絕區域 $R = \{z < -1.96 \text{ 或 } z > 1.96\}$

(4)樣本檢定統計量值 $z = \frac{268 - 250}{60/\sqrt{36}} = 1.8 \notin R$ ，無法拒絕 H_0

(5)沒有充分證據證實仲介公司的宣稱是錯的，只好接受他們的說法。

(b)

基本資料：雙尾， $\mu = 250$ ， $n = 36$ ， $\bar{x} = 268$ ， $s = 60$ ， $\alpha = 0.05$ ， p 值法

(1)虛無假設 $H_0: \mu = 250$ (雙尾)

(2)檢定統計量 $z = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$ (大樣本 $n = 36$)

(3)樣本檢定統計量值 $z = \frac{268 - 250}{60/\sqrt{36}} = 1.8$

(4)雙尾、 z 分配、臨界值 $z^* = \pm 1.8$ ，求得機率 p 值 = 0.0719

(5)決策者的顯著水準 $\alpha = 0.05$ 低於 p 值 = 0.0719，故無法拒絕 H_0 。

(c)

基本資料：雙尾， $\mu = 250$ ， $n = 36$ ， $\bar{x} = 268$ ， $s = 60$ ， $1 - \alpha = 95\%$ ，信賴區間法

(1)虛無假設 $H_0: \mu = 250$ (雙尾)

(2)檢定統計量 $z = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$ (大樣本 $n = 36$)

(3)雙尾、 z 分配、 $1 - \alpha = 95\%$ ，求得信賴區間 $CI_z = \{-1.96 \leq z \leq 1.96\}$

經轉換 ($\bar{x} = \mu + z \times \frac{s}{\sqrt{n}}$)，得信賴區間 $CI_{\bar{x}} = \{230.4 \leq \bar{x} \leq 269.6\}$

(4)樣本觀測值 $\bar{x} = 268 \in CI_{\bar{x}}$ ，無法拒絕 H_0

(5)沒有充分證據證實仲介公司的宣稱是錯的，只好接受他們的說法。

6.5 (92-雲科大-財金) 單一樣本平均數假設檢定

3. In performing a hypothesis test where the null hypothesis is that the population mean is 6.9 against the alternative hypothesis that the population mean is not equal to 6.9, a random sample of 16 items is selected. The sample mean is 7.1 and the sample standard deviation is 2.4. It can be assumed that the population is normally distributed. The level of significance is selected as 0.05. The decision rule for this problem is to reject the null hypothesis if the computed "t" value is _____.
- A. less than -1.761 or greater than 1.761
B. less than -2.131 or greater than 2.131
C. less than -1.753 or greater than 1.753
D. less than -2.120 or greater than 2.120

【解】

基本資料：雙尾， $\mu = 6.9$ ， $n = 16$ ， $\bar{x} = 7.1$ ， $s = 2.4$ ， $\alpha = 0.05$ ，z 值法

(1)虛無假設 $H_0: \mu = 6.9$ (雙尾)

(2)檢定統計量 $t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$ (自由度 $16 - 1 = 15$)

(3)雙尾、自由度 15 之 t 分配、 $\alpha = 0.05$ ，求得拒絕區域 $R = \{t < -2.1314 \text{ 或 } t > 2.1314\}$

(4)樣本檢定統計量值 $t = \frac{7.1 - 6.9}{2.4/\sqrt{16}} = 0.3333 \notin R$ ，無法拒絕 H_0

6.6 (94-逢甲-財金) 單一樣本平均數假設檢定

7. Taiwan Farmers' Production Company builds large harvesters. For a harvester to be properly balanced when operating, a 25-pound plate is installed on its side. The machine that produces these plates is set to yield plates that average 25 pounds. The distribution of plates produced from the machine is normal. However, the shop supervisor is worried that the machine is out of adjustment and is producing plates that do not average 25 pounds. To test this idea, he randomly selects 20 of the plates produced the day before and weights them. Table 1 below shows the weights obtained, along with the computed sample mean and sample standard deviation. The test is to determine whether the machine is out of control.

(a) State the null hypothesis and the alternative hypothesis. (5%)

(b) Compute the value of the test statistic. (5%)

(c) What is your decision regarding the null hypothesis? Interpret your decision. ($\alpha = 0.05$) ($t_{0.05,19} = 1.729$, $t_{0.025,19} = 2.093$) (10%)

Table 1. Data for Plates Weighted

22.6 22.2 23.2 27.4 24.5 27.0 26.6 28.1 26.9 24.9

26.2 25.3 23.1 24.2 26.1 25.8 30.4 28.6 23.5 23.6

$\bar{X} = 25.51$, $S = 2.1933$, and $n = 20$.

【解】

(a)(b)(c)

基本資料：雙尾， $\mu = 25$ ， $n = 20$ ， $\bar{x} = 25.51$ ， $s = 2.1933$ ， $\alpha = 0.05$ ，z 值法

(1)虛無假設 $H_0: \mu = 25$ (雙尾) ($H_1: \mu \neq 25$)

(2)檢定統計量 $t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$ (自由度 $20 - 1 = 19$)

(3)雙尾、自由度 19 之 t 分配、 $\alpha = 0.05$ ，求得拒絕區域 $R = \{t < -2.093 \text{ 或 } t > 2.093\}$

(4)樣本檢定統計量值 $t = \frac{25.51 - 25}{2.1933/\sqrt{20}} = 1.0399 \notin R$ ，無法拒絕 H_0

6.7 (94-政大-風險管理管) 單一樣本平均數假設檢定

5. The security department of a factory wants to know whether or not the true average time required by the night guard to walk his round is 30 minutes. If the night guard averaged 30.8 minutes with a standard deviation of 1.5 minutes in a random sample of 32 rounds, determine whether this is sufficient evidence to reject the null hypothesis $\mu = 30$ minutes in favor of the alternative hypothesis $\mu \neq 30$ minutes. Use the 0.01 level of significance. (10 points)

【解】

基本資料：雙尾， $\mu = 30$ ， $n = 32$ ， $\bar{x} = 30.8$ ， $s = 1.5$ ， $\alpha = 0.01$ ， z 值法

大樣本用 z 分配，會拒絕 H_0 。

6.8 (94-雲科大-財金) 單一樣本平均數假設檢定

4. Assume that the weight of cereal in a "10-ounce box" is $N(\mu, \sigma^2)$. To test $H_0: \mu = 10.1$ against $H_1: \mu > 10.1$, we take a random sample of size $n=16$ and observe that $\bar{x} = 10.4$ and $s = 0.4$. What is the approximate p-value of this test? _____ (10 points)

【解】

基本資料：雙尾， $\mu = 10.1$ ， $n = 16$ ， $\bar{x} = 10.4$ ， $s = 0.4$ ， p 值法

強迫用 z 分配（應該是自由度 15 的 t 分配）， p 值 = 0.0027。

6.9 (92-淡江-企管) 單一樣本比例假設檢定

五、精準主機板廠之裝配生產線依輸送帶傳送，且每日完成裝配的產品數量相當多。
若某日自裝配生產線抽取產品予以檢驗，且以“ $X_i = 0$ ”，表示第 i 次檢驗的結果為良品；“ $X_i = 1$ ”，表示第 i 次檢驗的結果不良品。假設該裝配生產線的產品不良率為 P 。試解答下列各題：

(1) 若某日自該裝配生產線抽取 $n=100$ 件產品予以檢驗，令 Y 表示此 100 件產品中不良品的件數，試說明 Y 的機率分配為何？（8 分）

(2) 若某日自該裝配生產線抽取 $n=100$ 件產品予以檢驗，令 Y 表示此 100 件產品中不良品的件數，若規定當 $Y \leq 10$ 時，則認為該裝配生產線的不良率 $P=0.1$ ；問此規定“是否合理”？，你的答案之理由為何？試以統計方法中之假設檢定觀念解答之。（8 分）

【解】

(1)

二項分配 $P(y) = \frac{100!}{y!(100-y)!} \times 0.1^y (1-0.1)^{100-y}, y = 0, 1, 2, \dots, 100$

(2)

由『若 $Y \leq 10$ ，則認為生產線的不良率 $p = 0.1$ 』，得知 $\{Y \leq 10\}$ 是拒絕區域，因此這是一個左尾檢定，故虛無假設應為『 $H_0: p \geq 0.1$ 』。將拒絕區域作變數轉換，即 $R_Y = \{Y \leq 10\} \Rightarrow R_{\bar{p}} = \{\bar{p} \leq \frac{10}{100} = 0.1\}$ 。就統計假設檢定而言，臨界值與母體參數值相等（ $p = \bar{p}^* = 0.1$ ）是很不尋常的事，一般在左尾檢定的場合，（拒絕區域）臨界值會小於母體參數的假設值。以本題為例（基本資料：左尾， $p = 0.1, n = 100$ ），只有在顯著水準 $\alpha = 0.50$ 之下，拒絕區域才會是 $R_{\bar{p}} = \{\bar{p} < 0.1\}$ 或 $R_Y = \{Y \leq 10\}$ 。

基本資料：左尾， $p = 0.1, n = 100, \alpha = 0.05$ ， z 值法

(1) 虛無假設 $H_0: p \geq 0.1$ （左尾）

(2) 檢定統計量 $z = \frac{\bar{p} - p}{\sqrt{p(1-p)}/\sqrt{n}}$

(3) 左尾、 z 分配、 $\alpha = 0.5$ ，求得拒絕區域 $R = \{z < 0\}$

經轉換（ $\bar{p} = p + z \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$ ），得信賴區間 $R_{\bar{p}} = \{\bar{p} < 0.1\}$ 。

6.10（93-政大-財管）單一樣本平均數假設檢定

3. (10%) The following data were gathered from a random sample of 11 items.

1200	1175	1080	1275	1201	1387
1090	1280	1400	1287	1225	

Use these data and a 5% level of significance to test the following hypotheses, assuming that the data come from a normally distributed population.

$H_0: \mu = 1160$ $H_a: \mu > 1160$

【解】

計算樣本平均數、樣本變異數：

x	x ²
1200	1,440,000
1175	1,380,625
1080	1,166,400
1275	1,625,625
1201	1,442,401
1387	1,923,769
1090	1,188,100
1280	1,638,400
1400	1,960,000
1287	1,656,369
1225	1,500,625
13600	16,922,314
Σx	Σx^2

$$n=11$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{13,600}{11} = 1,236.4$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum x^2 - (\sum x)^2/n}{n-1}} = \sqrt{\frac{16,922,314 - (13,600)^2/11}{11-1}} = 103.81$$

基本資料：雙尾， $\mu=1160$ ， $n=11$ ， $\bar{x}=1236.4$ ， $s=103.81$ ， $\alpha=0.05$ ，z 值法

(1)虛無假設 $H_0: \mu=1160$ (雙尾)

(2)檢定統計量 $t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$ (自由度 $11-1=10$)

(3)雙尾、自由度 10 之 t 分配、 $\alpha=0.05$ ，求得拒絕區域 $R = \{t < -2.2281 \text{ 或 } t > 2.2281\}$

(4)樣本檢定統計量值 $t = \frac{1236.4 - 1160}{103.81/\sqrt{11}} = 2.4397 \in R$ ，拒絕 H_0

(5)母體平均數不是 1160。

6.11 (94-逢甲-工工) 兩組樣本變異數、平均數假設檢定

4. 自兩常態母體取兩獨立隨機樣本，數據如下：

母體	樣本大小	樣本平均數	樣本標準差
1	10	68	13
2	12	75	18

(a) (7 分) $\alpha=0.05$ 檢定兩母體變異數是否相等？

(b) (8 分) 由(1)的結論， $\alpha=0.05$ 檢定兩母體平均數是否相等？

【解】

(a)

基本資料：雙尾， $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ， $n_1=10$ ， $s_1^2=13^2$ ， $n_2=12$ ， $s_2^2=18^2$ ， $\alpha=0.05$ ，z 值法

(1)虛無假設 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ($H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$) (雙尾)

(2)檢定統計量 $F = \frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2} = \frac{s_1^2}{s_2^2} \times \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ (自由度 $(10-1, 12-1) = (9, 11)$)

(3)雙尾、自由度 $(9, 11)$ 之 F 分配、 $\alpha=0.05$ ，求得 $R = \{F < 0.2556 \text{ 或 } F > 3.5879\}$

(4)樣本檢定統計量值 $F = \frac{13^2}{18^2} = 0.5216 \notin R$ ，無法拒絕 H_0

(5)兩母體變異數可視為相等。

(b)

基本資料：雙尾， $n_1=10$ ， $\bar{x}_1=68$ ， $s_1=13$ ， $n_2=12$ ， $\bar{x}_2=75$ ， $s_2=18$ ， $\alpha=0.05$ ，z 值法

(1)虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ ($H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$) (雙尾)

(2)檢定統計量 $t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_p^2}{n_1} + \frac{s_p^2}{n_2}}}$ (自由度 $10+12-2=20$)

(3)雙尾、自由度 20 之 t 分配、 $\alpha=0.05$ ，求得 $R=\{t < -2.086 \text{ 或 } t > 2.086\}$

(4)樣本檢定統計量值 $t = \frac{68-75}{15.95 \times \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{12}}} = -1.0253 \notin R$ ，無法拒絕 H_0

$$s_p = \sqrt{\frac{(10-1) \times 13^2 + (12-1) \times 18^2}{10+12-2}} = 15.95$$

(5)兩母體平均數可視為相等。

6.12 (90-淡江-企管) 兩組樣本變異數、平均數假設檢定

二、設一產品之容量呈常態分配，在改善填裝製程前，隨機抽查 7 個產品的容量，計算得平均容量為 145 c.c，標準差為 12 c.c。經改善填裝製程後，再隨機抽查 8 個產品的容量，計算得平均容量為 153 c.c，標準差為 11 c.c。

(1) 改善前後，所有產品容量的標準差是否相同？($\alpha=0.1$)

(2) 經改善填裝製程後，所生產的產品平均容量是否較高？($\alpha=0.05$)

【解】

(1)

基本資料：雙尾， $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ， $n_1 = 7, s_1^2 = 12^2, n_2 = 8, s_2^2 = 11^2$ ， $\alpha = 0.1$ ， z 值法

(1)虛無假設 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ($H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$) (雙尾)

(2)檢定統計量 $F = \frac{s_1^2 / \sigma_1^2}{s_2^2 / \sigma_2^2} = \frac{s_1^2}{s_2^2} \times \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ (自由度 $(7-1, 8-1) = (6, 7)$)

(3)雙尾、自由度 $(6, 7)$ 之 F 分配、 $\alpha = 0.1$ ，求得 $R = \{F < 0.2377 \text{ 或 } F > 3.866\}$

(4)樣本檢定統計量值 $F = \frac{12^2}{11^2} = 1.1901 \notin R$ ，無法拒絕 H_0

(5)兩母體變異數可視為相等。

(2)

基本資料：左尾， $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ， $n_1 = 7, \bar{x}_1 = 145, s_1 = 12, n_2 = 8, \bar{x}_2 = 153, s_2 = 11$ ， $\alpha = 0.05$ ， z 值法

(1)虛無假設 $H_0: \mu_1 \geq \mu_2$ ($H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq 0$) (左尾)

(2)檢定統計量 $t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_p^2}{n_1} + \frac{s_p^2}{n_2}}}$ (自由度 $7+8-2=13$)

(3)左尾、自由度 13 之 t 分配、 $\alpha = 0.05$ ，求得 $R = \{t < -1.7709\}$

$$(4) \text{樣本檢定統計量值 } t = \frac{145-153}{11.47 \times \sqrt{\frac{1}{7} + \frac{1}{8}}} = -1.3474 \notin R, \text{ 無法拒絕 } H_0$$

$$s_p = \sqrt{\frac{(7-1) \times 12^2 + (8-1) \times 11^2}{7+8-2}} = 11.47$$

(5) 兩新製程的產品平均容量比舊製程高。

6.13 (92-逢甲-保險) 兩組樣本變異數、平均數假設檢定

三. 有 A 與 B 兩種 3 號電池，令 μ_i 與 σ_i , $i=1, 2$, 分別代表 A 種與 B 種電池的平均壽命與標準差。兩種電池的壽命均為常態分配。分別隨機抽取 12 個電池測量其壽命，令樣本變異數為 S_1^2, S_2^2 。

(a)(5%) 當 $\sigma_1 = \sigma_2$ 時， $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ 的抽樣分配為何？

現在有 A 與 B 兩種電池壽命的隨機樣本，樣本數皆為 12，其樣本平均分別為 154.5 與 147.5 小時，樣本標準差分別為 7.5 與 6.2 小時。則

(b)(5%) 假設 $\sigma_1 = \sigma_2$ ，檢定 A 與 B 兩種電池平均壽命是否顯著不同時，其 p 值(p -value) 介於哪個範圍之間？(單選)
 (甲) 大於 0.1 (乙) (0.1, 0.05) (丙) (0.05, 0.04) (丁) (0.04, 0.02)
 (戊) (0.02, 0.01) (己) 小於 0.01

註：自由度為 22 的 t 分配，其一些右尾機率點如下

$$t_{0.05} = 1.717, t_{0.025} = 2.074, t_{0.02} = 2.183, t_{0.01} = 2.508, t_{0.005} = 2.819.$$

(c)(5%) 當 $\sigma_1 = \sigma_2$ 且 $\mu_1 - \mu_2 = 10$ 小時，在 $\alpha = 0.05$ 下檢定 A 與 B 兩種電池平均壽命是否顯著不同時，型 II 誤差(type II error)的機率大約為何(僅需列出機率式即可)？

(d)(5%) 欲使估計兩種電池的平均壽命差的誤差少於 3 小時的機率為 0.95，則樣本數最少各需要多少(假設要抽相同的樣本數)？

【解】

(a)

F 分配。

$$F = \frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_1^2/\sigma_1^2} = \frac{s_1^2}{s_2^2} \times \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

(b)

基本資料：雙尾， $n_1 = 12, \bar{x}_1 = 154.5, s_1 = 7.5, n_2 = 12, \bar{x}_2 = 147.5, s_2 = 6.2$ ， p 值法

(1) 虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ ($H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$) (雙尾)

(2) 檢定統計量 $t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_p^2}{n_1} + \frac{s_p^2}{n_2}}}$ (自由度 $12 + 12 - 2 = 22$)

(3) 樣本檢定統計量值 $t = \frac{154.5 - 147.5}{6.88 \times \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{12}}} = 2.4919$

(4)雙尾、自由度 22 之 t 分配、臨界值 $t^* = \pm 2.4919$ ，求得 p 值 = 0.0207

(若查 z 表，得 p 值 = 0.0127)

(c)

基本資料：雙尾， $n_1 = 12, \bar{x}_1 = 154.5, s_1 = 7.5, n_2 = 12, \bar{x}_2 = 147.5, s_2 = 6.2$ ，

$\mu'_1 - \mu'_2 = 10$ ，求 β 值

(1)虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ ($H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$) (雙尾)

(2)檢定統計量 $t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_p^2}{n_1} + \frac{s_p^2}{n_2}}}$ (自由度 $12 + 12 - 2 = 22$)

(3)雙尾、自由度 22 之 t 分配、 $\alpha = 0.05$ ，臨界值 $t^* = \pm 2.0729$

(4)正確分配的臨界值 $t' = \frac{-10}{6.88 \times \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{12}}} \pm 2.4919 = -1.486$ 與 -5.634

(5)信賴區間、自由度 22 之 t 分配、臨界值 $t' = -1.486$ 與 -5.634 ，求得 $\beta = 0.0757$

(d)

最少樣本數的公式為：

$$N \geq \left(\frac{Z \times \sigma}{E} \right)^2$$

本題中

$$N = 1 / \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) = 1 / \frac{2}{n} = \frac{n}{2}, Z = z_{1-\alpha/95\%} = 1.96, \sigma = s_p = 6.88, E = 3$$

因此

$$\frac{n}{2} \geq \left(\frac{1.96 \times 6.88}{3} \right)^2 \Rightarrow n \geq 40.4 \doteq 41$$

6.14 (92-淡江-企管) 兩組樣本平均數假設檢定

四、在一次牛肉消費的市場調查中，於台北市隨機訪問 250 個家庭，發現其中有 90 個家庭全家都不吃牛肉；於高雄市隨機訪問 250 個家庭，發現其中有 55 個家庭全家都不吃牛肉。設 P_1 與 P_2 分別表示台北市與高雄市全家都不吃牛肉的家庭比例。試根據此市場調查資料：

(1)求 $P_1 - P_2$ 之 95% 的信賴區間。(10 分)

(2)是否可以根據(1)之結果，在設定之顯著水準為 $\alpha = 0.05$ 下，檢定 $H_0: P_1 \leq P_2$ vs $H_1: P_1 > P_2$ 的檢定問題？若可以，你檢定的結果如何？若不可以，那應該如何做才是正確？檢定的結果又如何？(10 分)

【解】

(1)

基本資料： $n_1 = 250, \bar{p}_1 = \frac{90}{250}, n_2 = 250, \bar{p}_2 = \frac{55}{250}, 1 - \alpha = 95\%$ ，信賴區間

$$\text{檢定統計量 } z = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{s_p^2}{n_1} + \frac{s_p^2}{n_2}}} \quad (\text{大樣本})$$

$$\text{其中 } s_p^2 = \bar{p}_p(1 - \bar{p}_p), \quad \bar{p}_p = \frac{n_1\bar{p}_1 + n_2\bar{p}_2}{n_1 + n_2}$$

因此，的信賴區間為

$$CI_{p_1 - p_2} = \left\{ (\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \pm z_\alpha \times \sqrt{\frac{s_p^2}{n_1} + \frac{s_p^2}{n_2}} \right\}$$

帶入資料：

$$\bar{p}_1 - \bar{p}_2 = \frac{90}{250} - \frac{55}{250} = 0.14$$

$$\bar{p}_p = \frac{n_1\bar{p}_1 + n_2\bar{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{90 + 55}{250 + 250} = 0.29, \quad s_p^2 = \bar{p}_p(1 - \bar{p}_p) = 0.2059$$

$$z_{1-\alpha/2} = 1.96$$

$$\Rightarrow CI_{p_1 - p_2} = \left\{ 0.14 \pm 1.96 \times \sqrt{\frac{0.2059}{250} + \frac{0.2059}{250}} \right\} = \{0.0605 \leq p_1 - p_2 \leq 0.2195\}$$

(2)

雙尾檢定 ($H_0: p_1 = p_2$) 才可以用信賴區間作檢定。

題目 ($H_0: p_1 \leq p_2 \rightarrow H_0: p_1 - p_2 \leq 0$) 為右尾檢定，拒絕區域為

$$R_z = \{z \geq 1.645\}$$

$$\Rightarrow R_{\bar{p}_1 - \bar{p}_2} = \left\{ \bar{p}_1 - \bar{p}_2 \geq 1.645 \times \sqrt{\frac{0.2059}{250} + \frac{0.2059}{250}} \right\} = \{ \bar{p}_1 - \bar{p}_2 \geq 0.0668 \}$$

因為 $\bar{p}_1 - \bar{p}_2 = 0.14 \in R_{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}$ ，故應拒絕虛無假設，即台北市不吃牛肉的比例明顯高於高雄市。

6.15 (94-逢甲-國貿) 兩組樣本平均數假設檢定

3、逢甲大學想要瞭解研究所甄試入學學生是否比考試入學學生用功？因此隨機抽取了 50 個考試入學學生, 40 個甄試入學學生, 調查他們每週讀書時間, 得下列資料：

大學生	$\bar{X}_1 = 15.6$	$S_1^2 = 22.5$
二專生	$\bar{X}_2 = 13.7$	$S_2^2 = 20.9$

假設甄試入學和考試入學學生每週讀書時間分別服從均勻分配 U , 且變異數均未知。試問在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下, 是否能說明甄試入學學生比考試入學學生用功? (檢定量臨界值 $= \pm Z_{0.025}(8) = \pm 1.96$) (10%)

【解】

先對變異數作檢定 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

自由度(49,39)之 F 分配， $\alpha = 0.05$ ， $R = \{F < 0.553 \text{ 或 } F > 1.8463\}$

$F^* = 1.0766 \notin R$ ，故兩母體變異數應視為相等。

其次執行兩樣本平均數差的檢定：

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 0, \text{ 右尾, 大樣本, 檢定統計量 } z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_p^2}{n_1} + \frac{s_p^2}{n_2}}}$$

$$s_p^2 = \frac{(50-1) \times 22.5 + (40-1) \times 20.9}{50 + 40 - 2} = 21.79$$

$$z^* = 1.9187 \in R = \{z > 1.645\}, \text{ 拒絕虛無假設,}$$

考試入學的學生確實比甄試入學的學生用功。

6.16 (94-逢甲-保險) 兩組樣本平均數假設檢定

1. (15分) 一飲料公司推出兩種汽水，一種是普通汽水，一種是低糖汽水，該公司宣稱低糖汽水的含糖量比普通汽水的含糖量少4公克。某人喝過這兩種汽水後，覺得甜度都差不多，故懷疑該公司有欺騙消費者之嫌。經其向消基會檢舉後，消基會抽查的結果如下：

	樣本數	平均含糖量	標準差
普通汽水	80	9.42	0.98
低糖汽水	50	5.75	0.76

(a) 在顯著水準為5%時，檢定該公司是否有欺騙消費者之嫌？

(b) 說明(a)中您的解答所需的假設、公式或定理。

【解】

先對變異數作檢定 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

自由度(79,49)之 F 分配， $\alpha = 0.05$ ， $R = \{F < 0.6104 \text{ 或 } F > 1.6893\}$

$F^* = 1.6627 \notin R$ ，故兩母體變異數應視為相等。

其次執行兩樣本平均數差的檢定：

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq 4, \text{ 左尾, 大樣本, 檢定統計量 } z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_p^2}{n_1} + \frac{s_p^2}{n_2}}}$$

$$s_p^2 = \frac{(80-1) \times 0.98^2 + (50-1) \times 0.76^2}{80 + 50 - 2} = 0.9021$$

$$z^* = -2.0291 \in R = \{z < -1.645\}, \text{ 拒絕虛無假設,}$$

低糖汽水的含糖量沒有宣稱的低，該公司有欺騙消費者的嫌疑。

6.17 (93-逢甲-工工) 兩組樣本平均數假設檢定

6. 測量兩種不同品牌之汽油之黏性，所得之數據如下：

品牌 1	10.62, 10.58, 10.33, 10.72, 10.44, 10.74
品牌 2	10.50, 10.52, 10.58, 10.62, 10.55, 10.51, 10.53

請檢驗這兩種品牌之汽油之黏性的平均值相同之假設($\alpha=0.05$)，假設其均為常態分配，且標準差相同。(20 分)

【解】

先計算原始資料如下：

x	y	x^2	y^2
0.62	0.5	0.3844	0.25
0.58	0.52	0.3364	0.2704
0.33	0.58	0.1089	0.3364
0.72	0.62	0.5184	0.3844
0.44	0.55	0.1936	0.3025
0.74	0.51	0.5476	0.2601
	0.53		0.2809
3.43	3.81	2.0893	2.0847
Σx	Σy	Σx^2	Σy^2

$$n_1 = 6, \bar{x}_1 = 10 + \frac{3.43}{6} = 10.572, s_1^2 = \frac{2.0893 - \frac{3.43^2}{6}}{6-1} = 0.0257$$

$$n_2 = 7, \bar{x}_2 = 10 + \frac{3.81}{7} = 10.544, s_2^2 = \frac{2.0847 - \frac{3.81^2}{7}}{7-1} = 0.0018$$

其次執行兩樣本平均數差的檢定：

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0, \text{雙尾, 檢定統計量 } t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_p^2}{n_1} + \frac{s_p^2}{n_2}}}, \text{自由度 } 6 + 7 - 2 = 11$$

$$s_p = \sqrt{\frac{(6-1) \times 0.0257 + (7-1) \times 0.0018}{6+7-2}} = 0.1125$$

$$t^* = 0.4371 \notin R = \{t < -2.201 \text{ 或 } t > 2.201\}, \text{無法拒絕虛無假設,}$$

兩品牌黏度可視為相同。

6.18 (92-政大-財管) 兩組樣本平均數假設檢定

5. (10) Independent random samples of $n_1 = 64$ and $n_2 = 64$ were selected from populations 1 and 2, respectively. The population parameters and the sample means and variances are shown in the table.

	POPULATION	
	<u>1</u>	<u>2</u>
Sample size	64	64
Sample mean	25.7	23.1
Sample variance	31.4	25.9

- If your research objective is to show that μ_1 is larger than μ_2 , state the alternative and the null hypotheses that you would choose for a statistical test.
- Is the test in part (a) a one- or a two-tailed test?
- Give the rejection region for $\alpha = .10$.
- Calculate the value of the test statistic.
- Conduct the test and state your conclusions.

【解】

(a)

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq 0, H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$$

(b)

右尾

(c)

$$\text{假設 } \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2, \text{ 檢定統計量 } z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}, \text{ 大樣本, } \alpha = 0.1$$

$$\text{拒絕區域 } R = \{z > 1.28\}$$

(d)

$$z^* = \frac{25.7 - 23.1}{\sqrt{\frac{31.4}{64} + \frac{25.9}{64}}} = 2.7478$$

(e)

$$z^* = 2.7478 \in R, \text{ 拒絕 } H_0, \mu_1 \text{ 確實大於 } \mu_2。$$

6.19 (92-政大-企管) 兩組樣本平均數假設檢定 (成對樣本)

4. A service station manager wants to compare the demand difference between two types of gasoline, 92 unleaded, and 95 unleaded. Observations (in thousands of liters) are taken for eight weeks, and the data are shown here. Analyze the data and draw conclusions. (use most appropriate method and test at 0.05 level of significance). (25%)

Gasoline	Week 1	Week 2	Week 3	Week 4	Week 5	Week 6	Week 7	Week 8
95 unleaded	52	57	53	60	52	45	40	42
92 unleaded	43	46	50	55	50	48	46	50

【解】

先計算兩組樣本差如下：

x1	52	57	53	60	52	45	40	42
x2	43	46	50	55	50	48	46	50
d = x1 - x2	9	11	3	5	2	-3	-6	-8

$$n = 8, \bar{d} = 1.625, s_d = 6.84$$

其次執行單一樣本檢定：

$$H_0: d = 0, \text{雙尾}, \text{檢定統計量 } t = \frac{\bar{d} - d}{s_d / \sqrt{n}}, \text{自由度 } 8 - 1 = 7$$

$$t^* = 0.672 \notin R = \{t < -2.3646 \text{ 或 } t > 2.3646\}, \text{無法拒絕虛無假設},$$

兩油品的需求量沒有差異。

6.20 (93-政大-企管) 兩組樣本平均數假設檢定

4. Independent random samples were selected from two normal populations. The data are shown below.

Sample A	25	20	14	19	22
Sample B	35	37	31	49	40

(a) Does these data provide sufficient evidence to indicate that μ_A differs from μ_B ? Test using alpha = 0.1.

(b) Find a 90% confidence interval for $\mu_A - \mu_B$. Compare your interpretation of the confidence interval with your test results in part (a). (30%)

【解】

計算原始資料的統計量值：

$$n_1 = 5, \bar{x}_1 = 20, s_1 = 4.062, n_2 = 5, \bar{x}_2 = 38.4, s_2 = 6.7676$$

檢定母體變異數： $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

自由度(4,4)之 F 分配， $\alpha = 0.1$ ， $R = \{F < 0.1565 \text{ 或 } F > 6.3882\}$

$F^* = 0.3603 \notin R$ ，故兩母體變異數應視為相等。

(a)

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ ，雙尾，檢定統計量 $t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_p^2}{n_1} + \frac{s_p^2}{n_2}}}$ ，自由度 $5 + 5 - 2 = 8$

$$s_p = \sqrt{\frac{(5-1) \times 4.062^2 + (5-1) \times 6.7676^2}{5+5-2}} = 5.5812$$

$t^* = -5.2127 \in R = \{t < -1.8595 \text{ 或 } t > 1.8595\}$ ，拒絕虛無假設，

兩母體平均數有差異。

(b)

$$CI_t = \{-1.8595 \leq t \leq 1.8595\} \Rightarrow CI_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \{-6.564 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \leq 6.564\}$$

$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = -18.4 \notin CI_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$ ，拒絕虛無假設，

兩母體平均數有差異。

或

$$CI_t = \{-1.8595 \leq t \leq 1.8595\} \Rightarrow CI_{\mu_1 - \mu_2} = \{-28.779 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq -8.021\}$$

$\mu_1 - \mu_2 = 0 \notin CI_{\mu_1 - \mu_2}$ ，拒絕虛無假設，

兩母體平均數有差異。

6.21 (93-政大-國貿) 兩組樣本平均數假設檢定

4. Test the following hypotheses at 5% significance level.

- (i) Given $\bar{x} = 28$ for a sample of 50 of a normal variable for which $\sigma = 5$, test $H_0: \mu = 30$ against $H_1: \mu = 29$. (5%) (The critical value for a normal distribution at 5% significance level is 1.64. Here μ and σ are the population mean and standard deviation, respectively.)

- (ii) Given the sample values $n_1 = 10$ (sample size), $\bar{x}_1 = 20$ (sample mean), $s_1 = 6$ (sample standard deviation), $n_2 = 12$, $\bar{x}_2 = 18$, $s_2 = 5$, for two independent normal variables, test the hypothesis $H_0: \mu_1 = \mu_2$ (population means are equal). (5%)
($Pr(t \leq 2.086) = 0.975$, $Pr(t \leq 1.725) = 0.95$ when the degree of freedom is 20. Here t is the student's t statistics.)
- (iii) If the percentage of defective parts turned out by a worker during two consecutive days was 7% and 9%, respectively, and if 500 parts were turned out during each of those days, would the inspector be justified in claiming that quality had slipped? (5%) (Use the normal approximation for a binomial random variable.) (The critical values for a normal distribution at 5% and 2.5% significance levels are 1.64 and 1.96, respectively.)

【解】

(i)

題目中虛無假設與對立假設的寫法有點奇怪，我猜應該要作左尾檢定。

基本資料： $\mu = 30, \sigma = 5, n = 50, \bar{x} = 28, \alpha = 0.05$

(1) 虛無假設 $H_0: \mu \geq 30$

(2) 檢定統計量 $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

(3) 左尾、 z 分配、 $\alpha = 0.05$ ，求得拒絕區域 $R = \{z < -1.645\}$

(4) 樣本檢定統計量值 $z^* = \frac{28 - 30}{5/\sqrt{50}} = -2.8284 \in R$ ，拒絕 H_0

(ii)

題目自由度的給法已經假設母體變異數相等。

基本資料： $n_1 = 10, \bar{x}_1 = 20, s_1 = 6, n_2 = 12, \bar{x}_2 = 18, s_2 = 5, \alpha = 0.05$

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ ，雙尾，檢定統計量 $t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_p^2}{n_1} + \frac{s_p^2}{n_2}}}$ ，自由度 $10 + 12 - 2 = 20$

$$s_p = \sqrt{\frac{(10-1) \times 6^2 + (12-1) \times 5^2}{10+12-2}} = 5.4727$$

$t^* = 0.8535 \notin R = \{t < -2.086 \text{ 或 } t > 2.086\}$ ，無法拒絕虛無假設，

兩母體平均數沒有差異。

(iii)

基本資料： $n_1 = 500, \bar{p}_1 = 7\%, n_2 = 500, \bar{p}_2 = 9\%, \alpha = 0.05$

$$H_0: p_1 - p_2 \geq 0, \text{ 檢定統計量 } z = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \quad (\text{大樣本})$$

$$\text{其中 } s_1^2 = \bar{p}_1(1 - \bar{p}_1) = 0.0651, \quad s_2^2 = \bar{p}_2(1 - \bar{p}_2) = 0.0819$$

$$z^* = -1.1664 \notin R = \{z < -1.645\}, \text{ 無法拒絕虛無假設}$$

6.22 (93-淡江-國貿) 兩組樣本比例假設檢定

四、(20%)隨機抽查 A 城市 150 位有工作能力的居民，其中有 15 人失業，隨機抽查 B 城市 100 位有工作能力的居民，其中有 5 人失業，試以 p-值法檢定二城市的失業率是否相同。(取顯著水準 0.05)

【解】

基本資料： $n_1 = 150, \bar{p}_1 = \frac{15}{150} = 0.1, n_2 = 100, \bar{p}_2 = \frac{5}{100} = 0.05, \alpha = 0.05$

$$H_0: p_1 - p_2 = 0, \text{ 檢定統計量 } z = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{s_p^2}{n_1} + \frac{s_p^2}{n_2}}} \quad (\text{大樣本})$$

$$\text{其中 } s_p^2 = \bar{p}_p(1 - \bar{p}_p) = 0.0736, \quad \bar{p}_p = \frac{15 + 5}{150 + 100} = 0.08$$

$$z^* = 1.4276 \notin R = \{z < -1.96 \text{ 或 } z > 1.96\}, \text{ 無法拒絕虛無假設}$$

兩城市失業率可視為相同。

6.23 (91-淡江-企管) 兩組樣本平均數假設檢定 (成對樣本)

四、廣告上說某種節食方法可讓女生減輕體重，隨機抽取 6 位女生其節食前後的體重如下：

女生編號	1	2	3	4	5	6
節食前	85	76	63	70	65	63
節食後	70	68	60	65	68	61

假設資料是服從常態分配，試檢定此種節食法對女生是否有效？顯著水準 $\alpha = 0.05$ 。(15%)

【解】

先計算兩組樣本差如下：

x1	85	76	63	70	65	63
x2	70	68	60	65	68	61
d = x1 - x2	15	8	3	5	-3	2

$$n = 6, \quad \bar{d} = 5, \quad s_d = 6.0992$$

其次執行單一樣本檢定：

$$H_0: d = 0, \text{ 雙尾, 檢定統計量 } t = \frac{\bar{d} - d}{s_d / \sqrt{n}}, \text{ 自由度 } 6 - 1 = 5$$

$$t^* = 2.008 \notin R = \{t < -2.5706 \text{ 或 } t > 2.5706\}, \text{ 無法拒絕虛無假設,}$$

此節食法沒有顯著效果。

6.24 (93-淡江-國貿) 兩組樣本平均數假設檢定 (成對樣本)

五、(20%)某工程師欲比較兩部功能一樣，但型式不同的電腦的處理速度。假設電腦的處理速度呈常態分布，今隨機設計4組程式以作測試並記錄處理時間，如下：

程式	1	2	3	4
電腦1	70	60	65	72
電腦2	77	63	68	63

根據以上資料，在顯著水準0.05下，檢定電腦1的處理速度是否較快？

【解】

先計算兩組樣本差如下：

x1	70	60	65	72
x2	77	63	68	63
d = x1 - x2	-7	-3	-3	9

$$n = 4, \bar{d} = -1, s_d = 6.9282$$

其次執行單一樣本檢定：

$$H_0: d \geq 0, \text{ 左尾, 檢定統計量 } t = \frac{\bar{d} - d}{s_d / \sqrt{n}}, \text{ 自由度 } 4 - 1 = 3$$

$$t^* = -0.2887 \notin R = \{t < -2.3534\}, \text{ 無法拒絕虛無假設,}$$

兩電腦的處理速度沒有顯著不同。

6.25 (94-淡江-保險) 兩組樣本平均數假設檢定 (成對樣本)

四、為研究某減肥藥之成效，隨機選取 5 位參與減肥活動者，在減肥前與減肥活動一個月後，分別量其體重，得下列資料：假設 μ_1 ， μ_2 分別表示減肥前與減肥後的平均體重(公斤)，且服藥前後之體重均服從常態分配。

減肥前體重	85	63	58	48	69
減肥後體重	68	54	55	47	62

(1) 試求 $\mu_1 - \mu_2$ 之 95% 的信賴區間。(10 分)

(2) 試依檢定步驟檢定此減肥活動是否有效？(取顯著水準 $\alpha=0.05$) (10 分)

【解】

先計算兩組樣本差如下：

x1	85	63	58	48	69
x2	68	54	55	47	62
d = x1 - x2	17	9	3	1	7

$$n = 5, \bar{d} = 7.4, s_d = 6.229$$

(1)

檢定統計量 $t = \frac{\bar{d} - d}{s_d / \sqrt{n}}$ ，自由度 $5 - 1 = 4$ ， $1 - \alpha = 95\%$

$$CI_t = \{-2.7764 \leq t \leq 2.7764\} \Rightarrow CI_{d=\mu_1-\mu_2} = \{-0.3343 \leq d \leq 15.1343\}$$

(2)

$d = 0 \in CI_d$ ，無法拒絕虛無假設，

此減肥活動沒有顯著效果。

6.26 (94-雲科大-企管) 兩組樣本平均數假設檢定 (成對樣本)

四、 以下是 8 位基層管理人員訓練前和訓練後的績效表現： 10%

訓練前 35, 67, 25, 38, 32, 38, 39, 7

訓練後 33, 59, 22, 28, 24, 43, 26, 6

請計算訓練前後的平均數差異檢定 t 值為(1) 0.6~0.69 之間 (2) 0.7~0.79 之間 (3) 0.8~0.89 之間 (4) 1.0~1.99 之間 (5) 2.0~2.99 之間 (6) 3.0~3.99 之間

【解】

先計算兩組樣本差如下：

x1	35	67	25	38	32	38	39	7
x2	33	59	22	28	24	43	26	6
d = x1 - x2	2	8	3	10	8	-5	13	1

$$n = 8, \bar{d} = 5, s_d = 5.8064$$

其次執行單一樣本檢定：

$$H_0: d = 0, \text{雙尾}, \text{檢定統計量 } t = \frac{\bar{d} - d}{s_d / \sqrt{n}}, \text{自由度 } 8 - 1 = 7$$

$$t^* = \frac{5}{5.8064 / \sqrt{8}} = 2.4356$$

6.27 (94-逢甲-經濟) 兩組樣本平均數假設檢定 (成對樣本)

4. The following grade-point averages were collected over a period of 7 years to determine whether membership in a fraternity is beneficial or detrimental to grades:

Year:	1	2	3	4	5	6	7
Fraternity:	2.4	2.0	2.3	2.1	2.1	2.0	2.0
Nonfraternity:	2.4	2.2	2.5	2.4	2.3	1.8	1.9

Assuming that the populations were normal, test at 0.025 level of significance whether membership in a fraternity is detrimental to grades. (15%)

【解】

先計算兩組樣本差如下：

x1	2.4	2	2.3	2.1	2.1	2	2
x2	2.4	2.2	2.5	2.4	2.3	1.8	1.9
d = x1 - x2	0	-0.2	-0.2	-0.3	-0.2	0.2	0.1

$$n = 7, \bar{d} = -0.0857, s_d = 0.1864$$

其次執行單一樣本檢定：

$$H_0: d \geq 0, \text{左尾}, \text{檢定統計量 } t = \frac{\bar{d} - d}{s_d / \sqrt{n}}, \text{自由度 } 7 - 1 = 6$$

$$t^* = -1.2164 \notin R = \{t < -2.4469\}, \text{無法拒絕虛無假設},$$

兄弟會的學生成績沒有比較差。

6.28 (92-政大-財管) 相關係數假設檢定

4. (20) Two personnel evaluation techniques are available. The first requires a two-hour test interview session, while the second can be completed in less than an hour. A high correlation between test scores would indicate that the second test could replace the two-hour test and hence save time and money. Following is data that gives the scores on Test I (x) and Test II (y) for 15 applicants.

x	75	89	60	71	92	105	55	87	73	77	84	91	75	82	76
y	38	56	35	45	59	70	31	52	48	41	51	58	45	49	47

- Find the coefficient of correlation, r .
- Interpret r .
- Test to see if the correlation between x and y is significant at $\alpha = 0.01$.

【解】

(a)

計算原始資料：

x	75	89	60	71	92	105	55	87	73	77	84	91	75	82	76	1192
y	38	56	35	45	59	70	31	52	48	41	51	58	45	49	47	725
x^2	5625	7921	3600	5041	8464	11025	3025	7569	5329	5929	7056	8281	5625	6724	5776	96990
y^2	1444	3136	1225	2025	3481	4900	961	2704	2304	1681	2601	3364	2025	2401	2209	36461
xy	2850	4984	2100	3195	5428	7350	1705	4524	3504	3157	4284	5278	3375	4018	3572	59324

$$r = \frac{\sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n}}{\sqrt{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}} \sqrt{\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n}}} = \frac{59324 - \frac{1192 \times 725}{15}}{\sqrt{96990 - \frac{1192^2}{15}} \sqrt{36461 - \frac{725^2}{15}}} = 0.9539$$

(b)

x 、 y 之間有高度正相關

(c)

基本資料： $n=15$ 、 $r=0.9539$

(1) 虛無假設 $H_0: \rho = 0$

(2) 檢定統計量 $t = \frac{r - \rho}{\sqrt{(1-r^2)/(n-2)}}$ ，自由度 $n-2=15-2=13$

(3) 雙尾，自由度 13 之 t 分配， $\alpha = 0.01$ ，求得拒絕區域 $R = \{|t| > 3.0123\}$

(4) 樣本檢定統計量 $t^* = \frac{0.9539}{\sqrt{(1-0.9539^2)/(15-2)}} = 11.4597 \in R$ ，拒絕虛無假設

(5) 相關係數顯然不為零

6.29 (92-逢甲-工工) 推導新的檢定統計量

6. 兩常態母體取兩獨立隨機樣本，檢定 $H_0: \mu_1 = 2\mu_2$, $H_1: \mu_1 \neq 2\mu_2$ 。兩獨立隨機樣本大小分別為 n_1 與 n_2 。兩常態母體變異數 σ_1^2 與 σ_2^2 已知。說明檢定統計量為何？並且決定檢定的棄卻域(critical region)。(15 分)

【解】

(a)

虛無假設 $H_0: \mu_1 = 2\mu_2$ ($H_0: \mu_1 - 2\mu_2 = 0$) (雙尾)

$$\text{檢定統計量 } z = \frac{(\bar{x}_1 - 2\bar{x}_2) - \mu_{\bar{x}_1 - 2\bar{x}_2}}{\sigma_{\bar{x}_1 - 2\bar{x}_2}} = \frac{(\bar{x}_1 - 2\bar{x}_2) - (\mu_1 - 2\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{4\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{\bar{x}_1 - 2\bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{4\sigma_2^2}{n_2}}}$$

其中

$$\mu_{\bar{x}_1 - 2\bar{x}_2} = \mu_{\bar{x}_1} - \mu_{2\bar{x}_2} = \mu_1 - 2\mu_2$$

$$\sigma_{\bar{x}_1 - 2\bar{x}_2}^2 = \sigma_{\bar{x}_1}^2 + \sigma_{2\bar{x}_2}^2 = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{4\sigma_2^2}{n_2}$$

(b)

$$\text{拒絕區域 } R_z = \{|z| > z_\alpha^*\} \Rightarrow R_{\bar{x}_1 - 2\bar{x}_2} = \left\{ |\bar{x}_1 - 2\bar{x}_2| > z_\alpha^* \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{4\sigma_2^2}{n_2}} \right\}$$