靜宜大學 94 學年度第 1 學期企管系『統計學』期末考

【注意】本試卷共有 11 大題，第 1 至第 6 大題，每小題值 5 分，總計 70 分；第 7 至第 11 大題，每題值 10 分，總計 50 分。考試時間 80 分鐘。若你認為題目有欠周全或錯誤，請寫下你的假設後，逕行作答。請清楚寫上你的答案，並附上簡單過程、說明，**<u>沒有說明的答案得不到任何分數</u>**。(2006 年 1 月 13 日)

1. A recent report in Business Week indicated that 15 percent of all employees steal from their company each year. If a company employs 60 people, what is the probability that:

(a) Fewer than 5 employees steal?

(b) More than 5 employees steal?

(c) Exactly 5 employees steal?

(d) More than 5 but fewer than 15 employees steal?

【解】

x 為 $n=60, p=0.15$ 的二項分配 $\Rightarrow$ y 為 $\mu = np = 9, \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 2.77$ 的常態分配

$(a) P(x<5) = P(y \le 4.5) = P(z \le -1.62) = 0.0521$

其中：$z^* = \dfrac{4.5-9}{2.77} = -1.62$

$(b) P(x>5) = P(y \ge 5.5) = P(z \ge -1.26) = 1 - P(z \le -1.26) = 1 - 0.1032 = 0.8968$

其中：$z^* = \dfrac{5.5-9}{2.77} = -1.26$

$(c) P(x=5) = P(4.5 \le y \le 5.5) = P(-1.62 \le z \le -1.26) = 0.1032 - 0.0521 = 0.0511$

$(d) P(5 < x < 15) = P(5.5 \le y \le 14.5) = P(-1.26 \le z \le 1.99) = 0.9765 - 0.1032 = 0.8733$

2. The Sony Corporation produces a Walkman that requires two AA batteries. The mean life of these batteries in this product is 35. The distribution of the battery lives closely follows the normal probability distribution with a standard deviation of 5.5 hours. As a part of their testing program Sony tests samples of 25 batteries.

(a) What is the standard error of the distribution of the sample mean?

(b) What proportion of the sample will have a mean useful life more than 36 hours?

(c) What proportion of the sample will have a mean useful life less than 34.5 hours?

(d) What proportion of the sample will have a mean useful life between 34.5 and 36 hours?

【解】

x 為 $\mu = 35, \sigma = 5.5$ 的常態分配

$\Rightarrow \bar{x}$ 為 $\mu_{\bar{x}} = 35, \sigma_{\bar{x}} = \dfrac{5.5}{\sqrt{25}} = 1.1$ 的常態分配 $\left(\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{25}}{25} \right)$

$(a)\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5.5}{\sqrt{25}} = 1.1$

$(b)P(\bar{x} \ge 36) = P(z \ge 0.91) = 1 - P(z \le 0.91) = 1 - 0.8183 = 0.1817$

其中：$z^* = \frac{36-35}{1.1} = 0.91$

$(c)P(\bar{x} \le 34.5) = P(z \le -0.455) = 0.3247$

其中：$z^* = \frac{34.5-35}{1.1} = -0.455$

$(d)P(34.5 \le \bar{x} \le 36) = P(-0.455 \le z \le 0.91) = 0.8183 - 0.3247 = 0.4936$

3. X 爲 $n=15$ ， $p=0.4$ 的二項分配，右尾，臨界值爲 8，求 α 。

【解】

查表得 $P(X \le 7) = 0.7869$， $P(X \ge 8) = 1 - P(X \le 7) = 1 - 0.7869 = 0.2131$

4. X 爲 $\lambda = 3$ 的卜瓦松分配，區間，臨界值爲 3、8，求 α 。

【解】

查表得 $P(X \le 2) = 0.4232$ 、 $P(X \le 8) = 0.9962$ ，

$P(3 \le X \le 8) = P(X \le 8) - P(X \le 2) = 0.9962 - 0.4232 = 0.5730$

5. X 爲 $\mu = 4$ ， $\sigma = 1.5$ 的常態分配。

(a)左尾檢定，顯著水準 $\alpha = 0.10$ ，求拒絕區域。

(b)信賴度 $1-\alpha = 0.99$ ，求信賴區間。

【解】

(a)

查表 $P(z \le z^*) = 0.9$， 得臨界值 $z^* = 1.28 \Rightarrow P(z \le -1.28) = 0.10$，

臨界值： $X^* = 4 - 1.28 \times 1.5 = 2.08 \quad \Rightarrow \quad P(X \le 2.08) = 0.1$

(b)

查表 $P(z \le z^*) = 0.995$， 得臨界值 $z^* = 2.58 \Rightarrow P(-2.58 \le z \le 2.58) = 0.99$

臨界值： $X^* = 4 \pm 2.58 \times 1.5 = 0.1363, 7.8637 \quad \Rightarrow \quad P(0.14 \le X \le 7.86) = 0.99$

6. X 爲自由度 $(5,3)$ 的 F 分配。

(a)右尾檢定，顯著水準 $\alpha = 0.05$ ，求拒絕區域。

(b)信賴度 $1-\alpha = 90\%$ ，求信賴區間。

【解】

(a) $F_{\alpha=0.05, df=(5,3)} = 9.0135$， $R = \{X > 9.0135\}$

(b) $F_{\alpha=0.95,df=(5,3)}=\dfrac{1}{F_{\alpha=0.05,df=(3,5)}}=\dfrac{1}{5.4095}=0.1849$， $CI=\{0.1849\le X\le 9.0135\}$

7. 一組 8 人的隨機樣本，調查大學畢業生第一份工作的月薪，發現平均$22,000，標準差為$6,000。請建立平均月薪在 95%信賴度下的信賴區間。

【解】

$n=8$， $\bar{x}=22,000$， $s=\$6,000$， $1-\alpha=95\% \quad\Rightarrow\quad s_{\bar{x}}=\dfrac{s}{\sqrt{n}}=\dfrac{6,000}{\sqrt{8}}$ 。

最大容忍誤差 $\varepsilon=t_{\frac{\alpha}{2}=0.025,n=7}\times\dfrac{s}{\sqrt{n}}=2.3646\times\dfrac{6,000}{\sqrt{8}}=5,016$

$CI=\{\$22,000\pm\$5,016\}=\{\$16,984\le\bar{x}\le\$27,016\}$

8. 某研究調查同學對統計課的滿意度，經隨機訪問 16 位同學，結果有 10 位表示滿意，請寫出滿意度在 95%信賴度下的信賴區間。

【解】

$n=8$， $\bar{p}=\dfrac{10}{16}=0.625$， $1-\alpha=95\% \quad\Rightarrow\quad \sigma_{\bar{p}}=\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}=\dfrac{\sqrt{0.625\times0.375}}{\sqrt{8}}$ 。

最大容忍誤差 $\varepsilon=z_{\frac{\alpha}{2}=0.025}\times\dfrac{s}{\sqrt{n}}=1.96\times\dfrac{\sqrt{0.625\times0.375}}{\sqrt{8}}=0.2372$

$CI=\{0.625\pm0.2372\}=\{0.3878\le\bar{p}\le0.8622\}$

9. 某市調單位想瞭解單身住家每月的電費，假設他們要求信心水準 95%以上，最大容忍誤差$10 以下，且根據以往的研究經驗，該類住家每月電費的標準差為$160。請計算該研究的最低樣本數。

【解】

$\varepsilon=\$10$， $\sigma=\$160$， $1-\alpha=95\% \quad\Rightarrow\quad z_{\frac{\alpha}{2}=0.025}=1.96$ 。

最少樣本數 $n=\dfrac{z^2\sigma^2}{\varepsilon^2}=\dfrac{1.96^2\times160^2}{10^2}=983.4\doteq984$

10. 樣本 $X_1,\ldots,X_n$ 為 i.i.d.，來自平均數 μ 、標準差 σ 的母體，若

$$\bar{x}=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n},\quad s^2=\frac{(X_1-\bar{x})^2+(X_2-\bar{x})^2+\cdots+(X_n-\bar{x})^2}{n-1}$$

請驗證 s^2 是否為 σ^2 之不偏估計量。

【解】

$$E\left[s^2\right]=E\left(\frac{\left(X_1-\bar{X}\right)^2+\cdots+\left(X_n-\bar{X}\right)^2}{n-1}\right)=\frac{E\left(X_1-\bar{X}\right)^2+\cdots+E\left(X_n-\bar{X}\right)^2}{n-1}$$

$$=\frac{\frac{n-1}{n}\sigma^2+\cdots+\frac{n-1}{n}\sigma^2}{n-1}=\sigma^2$$

其中

$$E\left(X_k-\bar{X}\right)^2=E\left(X_k^2\right)-2E\left(X_k\frac{\left(X_1+\cdots+X_n\right)}{n}\right)+E\left(\frac{\left(X_1+\cdots+X_n\right)^2}{n^2}\right)$$

$$=\left(\sigma^2+\mu^2\right)-\tfrac{2}{n}\left(\sigma^2+n\mu^2\right)+\tfrac{1}{n^2}\left(n\sigma^2+n^2\mu^2\right)=\tfrac{n-1}{n}\sigma^2$$

$$E\left(X_iX_j\right)=\begin{cases}\sigma^2+\mu^2 & \text{when } i=j\\ \mu^2 & \text{when } i\neq j\ \left(X_i,X_j\ \text{互相獨立}\right)\end{cases}$$

故 s^2 爲 σ^2 的不偏估計量。

11. 樣本 $X_1,\ldots,X_n$ 為 i.i.d.，來自平均數 μ 、標準差 σ 的母體，若

$$Y_1=\frac{X_1+2X_2+3X_{n-1}+4X_n}{10},\quad Y_2=\frac{2X_1+3X_1+3X_n+2X_n}{10}$$

請以相對有效性判斷 Y_1 、 Y_2 兩估計量哪一個比較好。

【解】

$$V\left(Y_1\right)=V\left(\frac{X_1+2X_2+3X_{n-1}+4X_n}{10}\right)=\frac{\left(1+2^2+3^2+4^2\right)}{100}\sigma^2=\frac{30\sigma^2}{100}$$

$$V\left(Y_2\right)=V\left(\frac{2X_1+3X_2+3X_{n-1}+2X_n}{10}\right)=\frac{\left(2^2+3^2+3^2+2^2\right)}{100}\sigma^2=\frac{26\sigma^2}{100}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{V\left(Y_1\right)}{V\left(Y_2\right)}=\frac{30\sigma^2/100}{26\sigma^2/100}=\frac{30}{26}>1$$

故 Y_2 相對有效於 Y_1 。