

靜宜大學 94 學年度第 1 學期企管系『統計學』小考六(A)

【注意】本試卷共有 6 小題，每小題 20 分。考試時間 40 分鐘。請清楚寫上你的答案，並附上簡單過程、說明，沒有說明的答案得不到任何分數。(2006 年 1 月 2 日)

1. X 為自由度 8 的 χ^2 分配。右尾檢定，顯著水準 $\alpha = 0.05$ ，求拒絕區域。
2. X 為自由度 (4,6) 的 F 分配。(a)右尾檢定，顯著水準 $\alpha = 0.05$ ，求拒絕區域；
(b)左尾檢定，顯著水準 $\alpha = 0.05$ ，求拒絕區域。
3. X 為自由度 8 的 t 分配。右尾檢定，顯著水準 $\alpha = 0.05$ ，求拒絕區域。
4. 樣本 $X_1, \dots, X_n$ 為 i.i.d.，來自平均數 μ 、標準差 σ 的母體，若

$$Y_1 = \frac{X_1 + X_2 + X_{n-1} + X_n}{4}, \quad Y_2 = \frac{X_1 + X_1 + X_n + X_n}{4}$$

- (a)請證明 Y_1 、 Y_2 都是 μ 的不偏估計量。
- (b)請以相對有效性判斷 Y_1 、 Y_2 兩估計量哪一個比較好。

χ^2 分配右尾臨界值表

自由度	α				
	0.005	0.01	0.025	0.05	0.1
5	16.7496	15.0863	12.8325	11.0705	9.2364
6	18.5476	16.8119	14.4494	12.5916	10.6446
7	20.2777	18.4753	16.0128	14.0671	12.0170
8	21.9550	20.0902	17.5345	15.5073	13.3616
9	23.5894	21.6660	19.0228	16.9190	14.6837
10	25.1882	23.2093	20.4832	18.3070	15.9872

F 分配右尾臨界值表

n2 \ n1	$\alpha = 0.05$				$\alpha = 0.1$			
	1	4	6	8	1	4	6	8
2	18.5128	19.2468	19.3295	19.3710	8.5263	9.2434	9.3255	9.3668
4	7.7086	6.3882	6.1631	6.0410	4.5448	4.1072	4.0097	3.9549
6	5.9874	4.5337	4.2839	4.1468	3.7759	3.1808	3.0546	2.9830
8	5.3177	3.8379	3.5806	3.4381	3.4579	2.8064	2.6683	2.5893
10	4.9646	3.4780	3.2172	3.0717	3.2850	2.6053	2.4606	2.3772
9999	3.8424	2.3728	2.0995	1.9393	2.7060	1.9454	1.7747	1.6708

【解】

1.

$$\chi_{\alpha=0.05, df=8}^2 = 15.5073, R = \{X > 15.5073\}$$

2.

$$(a) F_{\alpha=0.05, df=(4,6)} = 4.5337, R = \{X > 4.5337\}$$

$$(b) F_{\alpha=0.05, df=(6,4)} = 6.1631, F_{\alpha=0.95, df=(4,6)} = \frac{1}{F_{\alpha=0.05, df=(6,4)}} = \frac{1}{6.1631} = 0.1623,$$

$$R = \{X < 0.1623\}$$

3.

$$F_{\alpha=0.1, df=(1,8)} = 3.4579, t_{\alpha=0.05, df=8} = \sqrt{F_{\alpha=0.1, df=(1,8)}} = \sqrt{3.4579} = 1.8595,$$

$$R = \{X > 1.8595\}$$

4.

(a)

$$\begin{aligned} E(Y_1) &= E\left(\frac{X_1 + X_2 + X_{n-1} + X_n}{4}\right) = \frac{1}{4}[E(X_1) + E(X_2) + E(X_{n-1}) + E(X_n)] \\ &= \frac{1}{4}(4\mu) = \mu \end{aligned}$$

故 Y_1 為 μ 的不偏估計量。

$$\begin{aligned} E(Y_2) &= E\left(\frac{X_1 + X_1 + X_n + X_n}{4}\right) = E\left(\frac{X_1 + X_n}{2}\right) = \frac{1}{2}[E(X_1) + E(X_n)] \\ &= \frac{1}{2}(2\mu) = \mu \end{aligned}$$

故 Y_2 為 μ 的不偏估計量。

(b)

$$\begin{aligned} V(Y_1) &= V\left(\frac{X_1 + X_2 + X_{n-1} + X_n}{4}\right) = \frac{1}{16}(4\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{4} \\ V(Y_2) &= V\left(\frac{X_1 + X_1 + X_n + X_n}{4}\right) = V\left(\frac{X_1 + X_n}{2}\right) = \frac{\sigma^2}{2} \\ \Rightarrow \frac{V(Y_1)}{V(Y_2)} &= \frac{\sigma^2/4}{\sigma^2/2} = \frac{1}{2} < 1 \end{aligned}$$

故 Y_1 相對有效於 Y_2 。