02機率概論

陳欣得

靜宜大學企管系

02機率概論

相對次數分配表有助於我們比較不同群組之間，統計資料的分布狀況。接下來第四章要討論的**機率分配**（***probability distribution***）可視為次數分配表的特殊化版本，本章先介紹一些關於機率的基本概念與術語。

章節安排：

§1 相對次數與機率

相對次數分配表中，相對次數大的組別出現的機會比較大，我們以相對次數作為該組別出現的機率。如**圖 2.1** 中，任選一個觀察個體，該個體的居住於台北的可能性最高，我們說居住在台北的機率為13/34 。

在自然語言中，機率與可能性的意思很相近。這裡我們需要留意兩者的差異，因為統計學用的是機率的概念，不是可能性。**機率**（***probability***）為客觀相對次數，機率大表示該類別組成份子之數目比較多，因此比較容易出現；**可能性**（***possibility***）為主觀相退次數，可能性大表示決策者選擇該組的傾向比較大。

城市	次數	相對次數
台北	13	13/34
台中	7	7/34
高雄	14	14/34
合計	34	1

圖 2.1　相對次數表中的相對次數為該組出現機率

範例 2.1　（機率與可能性）

陳老師在拍賣網站購買某特定商品的**可能性**是 30%，

根據以往經驗，陳老師在網路上購物被騙的**機率**是 10%；

所有進入某特定商品拍賣網頁的瀏覽者中，出價的**機率**是 5%。

古典機率、經驗機率、客觀機率、主觀機率

機率的背後一定有客觀相對次數分配表，就該分配表的差異，我們有兩種機率的分類方式。首先，就完整相對次數分配表的有無，區分古典機率與經驗機率。**古典機率**（***classical probability***）已知母體次數分配表，相對次數即該類別（事件）出現的機率；**經驗機率**（***empirical probability***）只知樣本次數分配表，相對次數即該類別（事件）出現的機率。

另外，就相對次數分配表來自於客觀存在還是主觀想像，區分客觀機率與主觀機率。**客觀機率**（***objective probability***）有真正次數分配表為依據的機率，如古典機率、經驗機率等；**主觀機率**（***subjective probability***）沒有客觀存在的次數分配表，據以產生機率的次數分配表是由當事人主觀心智所產生。

範例 2.2 （主觀機率與客觀機率）

牛蛇對戰中，沒有牛勝的**古典機率**，因為未來的對戰情況尚未發生；
參考本球季的紀錄，牛勝的機率為10/16（**經驗機率**）;
基於牛奪冠，興隆超市會全館打折，陳老師希望牛勝的機率是 90%（**主觀機率**）;
考慮兩對的紀錄與狀況，陳老師認為牛勝的機率是 70%（**什麼機率？**）。

質性資料 vs 隨機變數

質性資料不能作加法運算，在數學無法介入的情況下，能作的事並不多。相對地，量化資料的相對次數分配表，如果各分組的相對次數(機率)可以用數學函數呈現，則更是大有作為。

以數學函數表達相對次數或機率的關鍵概念是下一小節會討論的**隨機變數**(***random variables***)。隨機變數一定是量化數值，而且以隨機變數的某個範圍來定義分組（稱為事**件**），這種分組的相對次數才是統計學所討論的機率。

範例 2.3 （機率分配與隨機變數）

以下是量化資料的相對次數分配表，其中相對次數已經直接寫成機率 $P(x)$：

x	$P(x)$
0	1/16
1	4/16
2	6/16
3	4/16
4	1/16
	1

上表可以寫成函數形式

$$P(x)=\frac{24}{x!(4-x)!}\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{2}\frac{1}{x!(4-x)!},\quad x=0,1,\dots,4$$

其中，x 為一個有 5 個可能數值（5 組）的隨機變數。

§2 樣本空間、事件與隨機變數

本小節介紹有關機率的三個基本概念，樣本空間、事件、與隨機變數。

先以**圖 2.1** 的城市別相對次數分配表來理解這三個概念。其中，該表所依據的 34 筆被測量的個體為**樣本空間**（***sample space***）；該表中的三個分組為 34 個體(樣本空間)的部分集合，稱為**事件**（***event***），分組須滿足互斥且周延，這反映在總次數等於 34 或總相對次數等於 1 上面。本表的分組依據(變數或個體特徵)是所居住城市別，不能稱為**隨機變數**（***random variable***），若變數為量化的年資，則年資就是隨機變數。

範例 2.4 （樣本特徵與分組）

一個骰子有六個面，若以 $x, x=1,\ldots,6$ 代表出現那面的點數，則擲一個骰子的機率分配表如下：

x	$p(x)$
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

然而，擲骰子遊戲每次不止擲一個骰子。最常見的是擲四個骰子，扣除兩個相同點數的骰子，以其他兩個骰子的點數和之個位數為其結果。例如，擲出 $(2,3,2,4)$ 其結果為 7，而擲出 $(3,3,5,6)$ 的結果為 1。若四個骰子的點數都不相同，則需重擲。為了可以簡單分析，假設我們只擲兩個骰子，令 y 為其結果，則 y 的分配表如下：

範例 2.4 （樣本特徵與分組）(續)

y	$p(y)$
0	3/36
1	2/36
2	2/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36

為了增加遊戲的趣味性，我們會擲不同個數的骰子，也會有不同結果的規則；但是不變的是擲一個骰子的點數分配一定如 x，而其他的變化一定以 x 為基礎計算而來。

樣本空間 vs 隨機變數

樣本空間（***sample space*，*Ω***）為我們有興趣之全體個體所成的集合，即相對次數分配表中的母體。樣本空間是一個集合（set）；而樣本空間的每一元素（個體）是我們作測量的單位。

隨機變數（***random variables*，*RV***）為建立於樣本空間的實數值函數。隨機變數是一個函數（不是一個變數！）；隨機變數的定義域是樣本空間，值域是實數。隨機變數的定義讓相對次數分配表的分組一定是量化資料。**圖 2.2** 表示隨機變數將一個骰子的可能出現面分別轉換成 1 至 6 的實數直。

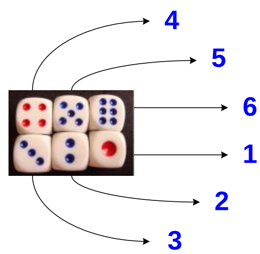


圖 2.2　隨機變數是一個實數值函數

實驗、出象、事件、事件機率

實驗（***experiment***）為對樣本空間之元素作挑選。實驗的結果稱為**出象**（***outcome***），也就是對實驗挑選的元素作測量的結果。

事件（***events***）為樣本空間的部分集合。對母體而言，事件是有某種共同特徵的個體所組成的集合；我們以其共同特徵來指稱某事件。對相對次數分配表（機率分配表）而言，事件是一個分組。在敘述統計學中，事件大多以隨機變數的某個範圍來描述。

所有事件所成的集合稱為**事件空間**（***event space***，***E***）。**機率**（***probability***）為建立於事件空間，值域為$[0,1]$區間的函數。注意喔，機率是事件的特徵。

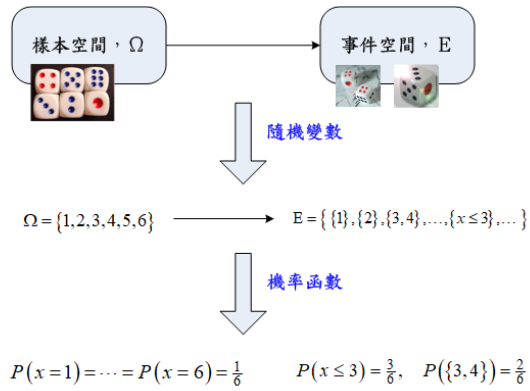


圖 2.3　隨機變數與機率函數的角色

定理 2.1　機率公理

函數 $f(\cdot)$ 要成為一機率函數，需滿足下列三條件：

(1) $f(\varnothing)=0$，$f(\Omega)=1$；

(2) $0\le f(A)\le 1, \forall A\in E$；

(3) $A\subseteq B \Rightarrow f(A)\le f(B)$。

此稱為**機率公理**（***axioms of probability***）。

機率空間

樣本空間、事件空間與機率函數，$\left(f(\cdot),E,\Omega\right)$，之組合稱為**機率空間**（***probability space***）。喔，機率空間裡沒有隨機變數！

範例 2.5　（機率空間）

在擲兩個骰子的範例中，所有可能結果的集合（樣本空間）為

$$\Omega=\left\{(x_1,x_2)\middle|x_1=1,\ldots,6,\ x_2=1,\ldots,6\right\}$$
$$=\left\{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),\ldots,(2,6),(3,1),\ldots,(4,1),\ldots,(5,1),\ldots,(6,1),\ldots,(6,6)\right\}$$

事件空間為

$$E=\left\{E_y\middle|y=0,1,\ldots,9\right\}=\left\{E_0,E_1,\ldots,E_9\right\}$$

其中，$E_y=\left\{(x_1,x_2)\middle|x_1+x_2=y\text{ 或 }x_1+x_2=10+y\right\}$，$y=0,\ldots,9$，即

$$E_0=\left\{(4,6),(5,5),(6,4)\right\},\quad E_1=\left\{(5,6),(6,5)\right\},\quad\cdots\quad E_9=\left\{(4,5),(5,4)\right\}\text{。}$$

機率函數為

$$P(y=0)=P(E_0)=\tfrac{3}{36},\quad P(y=1)=P(E_1)=\tfrac{2}{36},\quad\cdots\quad P(y=9)=P(E_9)=\tfrac{4}{36}\text{。}$$

本擲兩顆骰子的計算事件的流程請參考**圖 2.4** 之示意。

兩骰子

x	$p(x)$
(1,1)	1/36
(1,2)	1/36
:	:
(1,6)	1/36
(2,1)	1/36
:	:
(2,6)	1/36
(3,1)	1/36
:	:
:	:
(6,6)	1/36

$n(\Omega)=36$

(1,3)
(2,2)
(3,1)
和為4
$n\left(E_{y=4}\right)=3$

兩點數和

y	$p(y)$
0	3/36
1	2/36
2	2/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36

圖 2.4　由樣本空間、事件空間到事件機率

離散隨機變數 vs 連續隨機變數

以隨機變數是否為整數，我們有以下兩類隨機變數：**離散隨機變數**（***discrete random variables***）以整數或整數之部分集合為值域的隨機變數；**連續隨機變數**（***continuous random variables***）以實數或實數之部分集合為值域的隨機變數。

§3 抽樣與樣本空間

樣本空間的元素（即樣本）可以代表單一個體，也可以代表一組個體。後者在統計上的應用比較重要。

抽樣（***sampling***）為從母體中選出一組個體（母體的部分集合），抽樣的結果是得到一組**樣本**（***sample***）。以下為有關樣本的重要概念：

(1)樣本為抽樣所選出來的那組個體。

(2)樣本是母體的部分集合；

大多情況，『樣本』中有多於一個的個體；因此，稱為『一組樣本』比較恰當。

有時（比較不嚴謹），樣本會指一組樣本中的一個元素。

最後，所有可能樣本所成的集合稱為**樣本空間**（***sample space***）。

範例 2.6 （樣本空間）

假設母體為四個元素所成的集合，$P=\{a,b,c,d\}$，而且每一組樣本為母體中之 2 個相異元素所組成，則樣本空間為

$$\Omega=\{(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(b,d),(c,d)\}$$

又隨機變數 X 的定義為

$$X(a,b)=3,\ X(a,c)=4,\ X(a,d)=5,\ X(b,c)=5,\ X(b,d)=6,\ X(c,d)=7$$

則事件$\{X=5\}$的機率為

$$P(X=5)=P(\{(a,d),(b,c)\})=\frac{n\{(a,d),(b,c)\}}{n(\Omega)}=\frac{2}{6}$$

範例 2.7 （樣本空間）

一班 50 位同學，如果每一元素代表一個同學，則樣本空間有 50 個元素；
如果每一元素代表 2 位一組同學，則樣本空間有 $\frac{50\times49}{2}=1,225$ 個元素；
如果每一元素代表 3 位一組同學，則樣本空間有 $\frac{50\times49\times48}{3\times2}=20,600$ 個元素。

§3.1 計算集合元素數目

如同相對次數，統計學中的機率由分子與分母兩部分數值所組成，例如事件 $P(E)$ 的計算公式如下

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

其中，E 為事件集合，Ω 為樣本空間(也是集合)，$n(\cdot)$ 為集合的元素個數。

對於基於某些數學規律所形成的集合，我們可以藉由**排列**（***permutation***）、**組合**（***combination***）公式以及簡單計算，來推算其元素個數。以下依序為階乘、排列、組合、重複排列、重複組合五個公式。

定義 2.2　階乘（factorial）

非負整數，x，的階乘定義如下：

$$x! = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ x \times (x-1)! & x = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{0.1}$$

請留意以下數值的階乘結果：

$0! = 1,\quad 1! = 1,\quad 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24,\quad \dfrac{7!}{4!} = 7 \times 6 \times 5$ 。

定義 2.3　排列（permutation）

從 n 個不同物件中選取 m 次（不可重複選取， $m \le n$ ），將選取物件放置在 m 個位置上（位置有差異），則總共會有 P_m^n 種排列法：

$$P_m^n = \underbrace{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-m+1)}_{m\text{個}} = \frac{n!}{(n-m)!} \tag{0.1}$$

定義 2.4 組合（combination）

從 n 個不同物件中選取 m 次（不可重複選取，$m \le n$），將選取物件放置在 m 個位置上（位置沒有差異），則總共會有 C_m^n 種組合法：

$$C_m^n = \frac{P_m^n}{m!} = \frac{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{0.1}$$

以下是幾個有關組合公式的等式：

$$C_m^n = C_{n-m}^n,\qquad C_m^n = \frac{n}{m}\times C_{m-1}^{n-1},\qquad C_m^n = C_m^{n-1} + C_{m-1}^{n-1}\text{ 。}$$

定義 2.5 重複排列（permutation with repetitions）

從 n 個不同物件中選取 m 次（可重複選取），將選取物件放置在 m 個位置上（位置有差異），則總共有 n^m 種排列法：

$$n^m = \underbrace{n\times\cdots\times n}_{m\text{個}} \tag{0.1}$$

定義 2.6　重複組合（combinations with repetitions）

從 n 個不同物件中選取 m 次（可重複選取），將選取物件放置在 m 個位置上（位置沒有差異），則總共有 H_m^n 種組合法：

$$H_m^n = C_m^{n+m-1} = \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!m!} \tag{0.1}$$

以上排列、組合公式的異同整理如下。物件被選出之前後次序有關係者（或者稱為所放置位置有差異）者為**排列**，選出次序沒有關係（或者說放置位置沒有差異）者為**組合**；其中，單一物件可以重複選取（或稱為選後放回）者為**重複排列**或**重複組合**，而不可重複選取（或選後不放回）者為單純的排列或組合。

範例 2.8　（排列組合計算公式）

(1)班上有 20 位同學，抽籤決定運動會跳高、跳遠、鉛球等三項比賽的代表，則抽籤結果適用**排列公式**，總共有 $P_{m=3}^{n=20} = 20\times19\times18$ 種可能。

(2)班上有 20 位同學，抽籤決定 5 位參加運動會開幕式，抽籤結果適用**組合公式**，總共有 $C_{m=5}^{n=20} = 20!/(5!\times15!) = (20\times19\times18\times17\times16)/(5\times4\times3\times2\times1)$ 種可能。

(3)班上有 20 位同學，抽籤決定運動會跳高、跳遠、鉛球等三項比賽的代表，可能重複被抽中，則抽籤結果適用**重複排列公式**，總共有 $n^m = 20^3$ 種可能。

(4)班上有 20 位同學，抽籤誰可以得到多出來的 5 個便當，可能重複被抽中，則抽籤結果適用**重複組合公式**，總共有 $H_{m=5}^{n=20} = C_5^{20+5-1=24} = C_5^{24}$ 種可能。

二項式定理 vs 多項式定理

最後，提供兩個與排列組合有關的公式，稱為**二項式定理**（***binomial theorem***）、以及**三項式定理**（***trinomial theorem***）或者**多項式定理**（***multinomial theorem***）：

$$\left(x+y\right)^n=\sum_{m=0}^{n}C_m^n x^m y^{n-m} \tag{0.1}$$

$$\left(x+y+z\right)^n=\sum_{\substack{p+q+r=n \\ p,q,r=0,\ldots,n}}\frac{n!}{p!q!r!}x^p y^q z^r \tag{0.2}$$

以下中學時代所背誦的公式就是這兩個公式的特例：

$$\left(x+y\right)^2=x^2+2xy+y^2,\qquad \left(x+y\right)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3,$$

$$\left(x+y+z\right)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz$$ 。

範例 2.9 （樣本空間元素個數）

梭哈遊戲為從一副撲克牌（52 張）中取 5 張為一手牌，然後以手牌中花樣出現的機率大小來決定勝負。梭哈遊戲手牌的所有可能組合個數為

$$C_5^{52}=\frac{52!}{5!\times 47!}=2,598,960$$

大樂透從 49 個號碼中選 6 個，因此頭彩是以下所有組合之一：

$$C_6^{49}=13,983,816$$

樂透彩從 38 個號碼中選 6 個，一定要中頭彩的話，只要買

$$C_6^{38}=2,760,681$$

張彩券就可以了。四星彩正彩在 1~4 四個位置上分別選 0~9 之一個阿拉伯數字所組成（位置有差異、選後放回），這是一種重複排列，總共有$10^4=10000$種組合。

範例 2.10 （重複組合）

有 5 枝相同的鉛筆要分給 3 位同學，每位同學可以分得 0~5 枝，總共有幾種分法？

這是一個典型的重複組合問題：每次從 $n=3$ 位同學中選出一位來頒贈一枝鉛筆，總共選 $m=5$ 次，同學可以重複被選中，而各次得到的鉛筆沒有差異。總共有

$$H_m^n = C_m^{n+m-1} = C_5^{3+5-1} = C_5^7 = C_2^7 = 7\times 6/2 = 21$$

種組分法。

請注意喔，本題不能解讀為：每次從 $n=5$ 枝鉛筆中選出一枝來送給同學，因為被選取的物必須是 n 件不同的物件。

重複組合公式的推導想法。想像有一列排開的 $5+3-1=7$ 個位置，其中，$n=5$ 個位置來放鉛筆，另外 $m-1=3-1=2$ 個位置用來放擋板；第一擋板之前的鉛筆歸屬於第一位同學，兩擋板之間者屬於第二位同學等等。則這些鉛筆與擋板的放置一共有 C_5^7 種方式，也就是重複組合公式 $H_{m=5}^{n=3} = C_5^{3+5-1} = C_5^7$ 。

§3.2 加法律與乘法律

若抽樣需分幾個階段進行，計算樣本空間元素個數會稍複雜。

同一階段中，不同狀況的次數應加總計算，是為加法律；不同階段間，應將各階段的次數相乘以得樣本空間元素個數，是為乘法律。

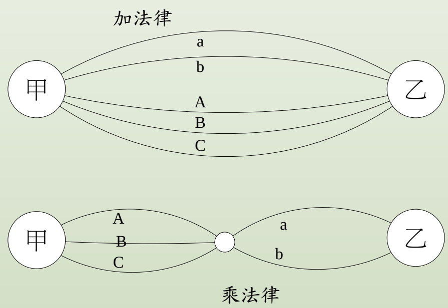
範例 2.11 （加法律與乘法律）

假設從甲地到乙地的交通工具有 3 種火車，2 種公車，則

(1)從甲地到乙地一共有$3+2=5$種方式（加法律）；

(2)來回一共有$(3+2)\times(3+2)=25$種方式（階段內加法律、階段間乘法律）；

(3)若甲地到乙地需先搭火車、然後再搭公車，則一共有$3\times2=6$種方式（乘法律）。



範例 2.12 （加法律與乘法律）

排列公式的邏輯：分 m 個階段選出物件，第 1 階段有 n 個可以挑，第 2 階段有 $n-1$ 個可以挑選，直到第 m 階段剩下 $n-m+1$ 個可以挑。因此共有

$$P_m^n = n\times(n-1)\times\cdots\times(n-m+1)$$

種挑選法（乘法律）。

範例 2.13 （加法律與乘法律）

五張同花的梭哈牌有幾種？

分兩個階段決定五張同花牌：第一階段決定花色，第二階段決定數字。前者有 4 種花色，後者為 13 個數字中選 5 個，因此

$$\text{五張同花的手牌數目} = 4 \times C_5^{13} = 4 \times 1,287 = 5,148$$

富豪（full-house，三張同數字配上另兩張同數字）的梭哈牌有幾種？

分兩個大階段進行：先挑出三張同數字，再挑出另兩張同數字。每個大階段又分成兩個小階段：先決定三條（一對）的數字，再由該數字的 4 張牌中挑出 3 張（或 2 張）。因此

$$\text{富豪的手牌數目} = \left[C_1^{13} \times C_3^4\right] \times \left[C_1^{12} \times C_2^4\right] = 13 \times 4 \times 12 \times 6 = 3,744$$

範例 2.13 （加法律與乘法律）(續)

順子的梭哈牌有幾種？

分兩個階段進行：先決定順子的最小數字（A 到 10 共 10 個），然後決定各個數字的花色（每個數字都可以有 4 種花色）。因此

$$\text{順子的手牌數目} = 10 \times \left(4^5\right) = 10,240$$

§4 事件的性質與計數法則

若 Ω 為樣本空間，A，$A \subseteq \Omega$，為定義於該樣本空間的一個事件，則事件 A 的**機率**（***probability***）定義如下

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)} \tag{0.1}$$

其中，$n(\Omega)$為樣本空間元素個數，$n(A)$為集合（事件）A之元素個數 。

我們已經在上一節討論集合元素數目的計算，本節接下來討論事件經過交集、聯集、補集等運算後的機率，並介紹條件機率、邊際機率的概念。原則上，這些概念可藉由列聯表來記憶與理解。

範例 2.14 （事件的機率）

請分別計算梭哈牌中取得富豪、同花、順子等牌面的機率？

令 A_1、A_2、A_3分別為取得富豪、同花、順子的事件。由之前範例的討論，得知：

$$P(A_1)=\frac{n(A_1)}{n(\Omega)}=\frac{3,744}{2,598,960}$$

$$P(A_2)=\frac{n(A_2)}{n(\Omega)}=\frac{5,148}{2,598,960}$$

$$P(A_3)=\frac{n(A_3)}{n(\Omega)}=\frac{10,240}{2,598,960}$$

§4.1 交集事件的機率

兩事件 A、B 交集的機率，$P\left(A \cap B\right)$，稱為該兩事件的**聯合機率**（***joint probability***）。我們已經定義，兩事件 A、B，若 $A \cap B = \varnothing$，則稱為此兩事件**互斥**（***exclusive***）。互斥事件也可以經由聯合機率等於零來定義。

定義 2.7　互斥（exclusive）

若 $A \cap B = \varnothing$，則稱 A、B 兩事件獨立，即

$$A \text{與} B \text{互斥} \quad \equiv \quad A \cap B = \varnothing \quad \equiv \quad P\left(A \cap B\right) = 0 \qquad (0.1)$$

上面(0.1)經由 $n\left(A \cap B = \varnothing\right) = 0$ 推導而來。

範例 2.15 （列聯表 vs 聯合機率）

就下列列聯表：

年資＼城市	台北	台中	高雄	邊際次數
1~2	2	2	2	6
3~5	5	3	5	13
6~9	3	2	6	11
10 以上	3	0	1	4
邊際次數	13	7	14	34

令 A_1、A_2、A_3、A_4 分別表示四種不同年資的事件，B_1、B_2、B_3 分別表示住台北、台中、高雄的事件。則

$$P(B_2 \cap B_3) = P(\text{住台中且住高雄}) = P(\varnothing) = 0$$

$$P(B_3 \cap A_3) = P(\text{住高雄且年資6到9年}) = \frac{6}{34}$$

因分組有互斥且周延的要求，故列聯表中來自相同變數的事件間一定互斥，例如 A_1、A_2、A_3、A_4 間互斥，而 B_1、B_2、B_3 間也互斥。

§4.2 條件機率

在事件 B 發生的條件下，事件 A 發生的機率記為 $P(A|B)$，其操作性定義如下：

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{0.1}$$

這種機率稱為**條件機率**（***conditional probability***）。藉由列聯表來思考，事件 B 條件下的機率建立在事件 B 所在行或列的數值上，請參閱下列範例。

若條件事件為樣本空間 Ω，則條件機率即為其絕對機率，如下

$$P(A|\Omega) = \frac{n(A \cap \Omega)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = P(A)$$

這個機率也稱為**邊際機率**（***marginal probability***），這名詞來自於列聯表的邊際次數。

範例 2.16 （列聯表 vs 條件機率、邊際機率）

就下列列聯表：

年資＼城市	台北	台中	高雄	邊際次數
1~2	2	2	2	6
3~5	5	3	5	13
6~9	3	2	6	11
10 以上	3	0	1	4
邊際次數	13	7	14	34

令 A_1、A_2、A_3、A_4 分別表示四種不同年資的事件，B_1、B_2、B_3 分別表示住台北、台中、高雄的事件。則

$$P(A_3|B_3)=\frac{n(A_3\cap B_3)}{n(B_3)}=\frac{6}{14}$$ （只看 B3 高雄那一行）

$$P(B_3|A_3)=\frac{n(B_3\cap A_3)}{n(A_3)}=\frac{6}{11}$$ （只看 A3 年資 6~9 年那一列）

$$P(B_3)=\frac{14}{34}$$ （只看最後一行的邊際次數）

$$P(A_3)=\frac{11}{34}$$ （只看最後一列的邊際次數）

定義 2.8 獨立（independent）

若 $P(A|B)=P(A)$，則稱 A、B 兩事件獨立，即

$$\begin{aligned} A\text{與}B\text{獨立} &\equiv P(A|B)=P(A) \equiv P(B|A)=P(B) \\ &\equiv P(A\cap B)=P(A)P(B) \end{aligned} \tag{0.1}$$

§4.3 聯集事件的機率

經由以下集合元素數目的等式

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\text{，}$$

我們可以得到類似的機率關係：

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \tag{0.1}$$

相同的推理，經由以下補集的運算

$$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B},\qquad \overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}\text{；}$$

我們可以得到補集運算似的機率關係：

$$P(\bar{A})=1-P(A)$$
$$P(\overline{A\cap B})=P(\bar{A}\cup\bar{B})=1-P(A\cap B)$$
$$P(\overline{A\cup B})=P(\bar{A}\cap\bar{B})=1-P(A\cup B)$$

§4.4 機率加法法則與乘法法則

兩事件聯集的機率，計算公式如(2.12)，即

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

若兩集合有互斥的關係，則上面公式會有所簡化。

又兩事件交集的機率，定義如(2.10)，即

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\quad\Rightarrow\quad P(A\cap B)=P(A|B)P(B)=P(B|A)P(A)$$

若兩集合有獨立的關係，則上面公式會有所簡化。

定義 2.9　機率加法法則

若 A 與 B 互斥，則 $P(A \cap B) = 0$，因此

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{0.1}$$

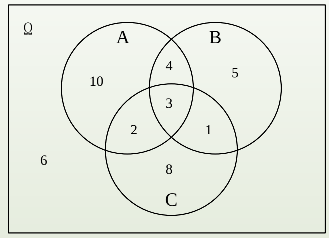
定義 2.10　機率乘法法則

若 A 與 B 獨立，則 $P(A|B) = P(A)$、$P(B|A) = P(B)$，因此

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{0.1}$$

範例 2.17 （事件的機率）

就下列資料：



直接計算可得：

$$n(A)=19,\quad n(B)=13,\quad n(C)=14,\quad n(\Omega)=39$$

以下為事件機率的計算：

$$P(A)=P(A|\Omega)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{19}{39},\qquad P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{7}{13}$$

$$P(A|B\cap C)=\frac{n(A\cap B\cap C)}{n(B\cap C)}=\frac{3}{4}$$

$$P(A\cap C|B\cup C)=\frac{n((A\cap C)\cap(B\cup C))}{n(B\cup C)}=\frac{n(A\cap C)}{n(B\cup C)}=\frac{5}{23}$$

§4.5 事件機率計算之彙整

就集合運算後之事件機率的計算，有關的計算公式彙整如下，原則上只要知道其中三項，就可以用這些公式推知其它各項之機率。

$$P(A\cup B)+P(A\cap B)=P(A)+P(B)$$
$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$$
$$A,B\text{互斥}\quad\Leftrightarrow\quad P(A\cap B)=0$$
$$A,B\text{獨立}\quad\Leftrightarrow\quad P(A|B)=P(A)\quad\Leftrightarrow\quad P(B|A)=P(B)$$

$$P(A^c)=1-P(A),\quad P(B^c)=1-P(B)$$
$$P(A^c\cap B^c)=P(A\cup B)^c=1-P(A\cup B)$$
$$P(A^c\cup B^c)=P(A\cap B)^c=1-P(A\cap B)$$

範例 2.18 （事件機率計算）

1. 【單選題】假如 A 和 B 為獨立事件且 P(A) = 0.2，P(B) = 0.6，則 P(A∪B) =

   (A) 0.62 (B) 0.12 (C) 0.60 (D) 0.68

   答案: (D)

2. 【單選題】假如 P(A) = 0.4，P(B| A) = 0.35，P(A∪B) =0.69，則 P(B) =

   (A) 0.14 (B) 0.43 (C) 0.75 (D) 0.59

   答案: (B)

3. 【單選題】若 P(A) = 0.4 ， P(A∩B) = 0.1 ，而 (A∪B)之補集的發生機率為 0.2，那麼 P(B) = ？(102 初考)

   (A) 0.3 (B) 0.4 (C) 0.5 (D) 0.6

   答案: (C)

範例 2.18 （事件機率計算）(續)

【解】

(1)

A 和 B 為獨立事件 $\Rightarrow\ P(A\cap B)=0$；

$P(A\cup B)+P(A\cap B)=P(A)+P(B)\ \Rightarrow\ P(A\cup B)+0=0.2+0.6$

$\Rightarrow\ P(A\cup B)=0.8$

(2)

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)\ \Rightarrow\ P(A\cap B)=0.4\times 0.35=0.14$

$P(A\cup B)+P(A\cap B)=P(A)+P(B)\ \Rightarrow\ 0.69+0.14=0.4+P(B)$

$\Rightarrow\ P(B)=0.69+0.14-0.4=0.43$

(3)

$P(A\cup B)^c=1-P(A\cup B)\ \Rightarrow\ 0.2=1-P(A\cup B)\ \Rightarrow\ P(A\cup B)=1-0.2=0.8$

$P(A\cup B)+P(A\cap B)=P(A)+P(B)\ \Rightarrow\ 0.8+0.1=0.4+P(B)$

$\Rightarrow\ P(B)=0.8+0.1-0.4=0.5$

§5 貝氏定理

貝式定理（*Bayes' Rule*）涉及事前機率（*prior probability*）與事後機率（*posterior probability*）的轉換，是統計學的重要概念之一。分割與總機率法則是瞭解貝氏定理的兩個重要概念。

定義 2.11　分割（partition）

若 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 互斥且周延，則稱 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 為 Ω 的一組分割；也稱 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 分割 Ω 。

次數分配表、列聯表中的分組必須是母體（或樣本空間）的一組分割。

定義 2.12　總機率法則（law of total probability）

若 $B_1, B_2, \ldots, B_n$ 為 Ω 的一組分割，則

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + \cdots + P(B_n \cap A) \\ &= P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \cdots + P(B_n)P(A|B_n) \end{aligned}$$

其中，$A = (B_1 \cap A) \cap (B_2 \cap A) \cap \cdots \cap (B_n \cap A)$。

總機率法則討論某事件(集合)A 的機率，可以由散落於一組分割中的各部分之加總來表示。

定理 2.13　貝氏定理（Bayes' Rule）

若 $B_1, B_2, \ldots, B_n$ 為 Ω 的一組分割，且 $P(A) \neq 0$，則

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j \cap A)}{P(A)}$$

其中，

$$P(B_j \cap A) = P(B_j)P(A|B_j)，$$

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \cdots + P(B_n)P(A|B_n)。$$

事前機率 vs 事後機率

請注意，貝氏定理中等號左邊是 A 條件下 B_j 的機率，等號右邊則是 A 的條件機率與 B_j 的機率。前者，等號左邊的 $P\left(B_j \middle| A\right)$，稱為**事後機率**（***posterior probability***），在藥物、試劑使用後我們想知道之可能結果的機率；而後者，等號右邊的 $P\left(A \middle| B_j\right)$，稱為**事前機率**（***prior probability***），在藥物、試劑等產品的研發階段就已經量測或知道的機率。

貝氏定理一定涉及兩種分割，

一個為已知的條件機率（事前機率，$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 之條件機率），

另一個為需要求解的事後機率（$B_1, B_2, \ldots, B_n$ 之條件機率）。

後者之分割的絕對機率則為已知（$B_1, B_2, \ldots, B_n$ 之機率）。其操作流程請參閱下列範例。

範例 2.19 （貝氏定理）

某公司某產品由三個工廠生產，產量分別為 20%、30%、50%；三工廠的該產品的不良率分別為 2%、3%、1%。若發現不良品，計算該不良品由第一個工廠生產的機率。

【解】

兩種分割分別為

事前機率分組：『工廠一、工廠二、工廠三』；

事後機率分組：『正常品、不良品』。

題目給的已知資料為

$$P\left(B_1\right)=0.2,\quad P\left(B_2\right)=0.3,\quad P\left(B_3\right)=0.5,$$
$$P\left(A_2 \middle| B_1\right)=0.02,\quad P\left(A_2 \middle| B_2\right)=0.03,\quad P\left(A_2 \middle| B_3\right)=0.01$$ 。

範例 2.19 （貝氏定理）(續)

由已知資料為基礎，整理、計算完成以下事前機率工作表：

事前機率 $P(行_j|列_i)$、$P(列_i)$

	正常品	不良品	邊際機率
工廠一	98.00%	2.00%	20%
工廠二	97.00%	3.00%	30%
工廠三	99.00%	1.00%	50%

其次，完成列聯表的聯合機率：

聯合機率 $P(列_i \cap 行_j)$

	正常品	不良品
工廠一	0.1960	0.0040
工廠二	0.2910	0.0090
工廠三	0.4950	0.0050
邊際機率	0.9820	0.0180

其中，$98\% \times 20\% = 0.1960$ 、 $97\% \times 30\% = 0.2910$ 。

範例 2.19 （貝氏定理）(續2)

最後，整理出事後機率工作表，如下

事後機率 $P(列_i|行_j)$、$P(行_j)$

	正常品	不良品
工廠一	0.1996	0.2222
工廠二	0.2963	0.5000
工廠三	0.5041	0.2778
邊際機率	0.9820	0.0180

其中，$\frac{0.1960}{0.9820} = 0.1996$ 、 $\frac{0.0040}{0.0180} = 0.2222$ 。

結果解讀如下。發現不良品的機率為 $P(\text{不良品}) = 0.018$，不良品出產自第一個工廠的機率為 $P(\text{第一工廠}|\text{不良品}) = 0.2222$ 。

範例 2.20 （貝氏定理）

某成衣公司有 A、B 兩家工廠，A 工廠生產 30%，而不良品比例是 8%，B 工廠生產 70%，而不良品比例是 3%，從工廠生產的混合產品中隨機抽選一件，若已知抽到不良品，則此不良品來自 B 工廠的機率最接近何值？(106 初考)

(A) 0.045　(B) 0.018　(C) 0.467　(D) 0.021

答案: (C)

範例 2.20 （貝氏定理）(續)

【解】

事前機率 P(行j|列i)、P(列i)

	良品	不良品	邊際機率
A		8%	0.3
B		3%	

聯合機率

	良品	不良品	邊際機率
A	0.3×92%	0.3×8%	0.300
	0.276	0.024	
B	0.7×97%	0.7×3%	0.700
	0.679	0.021	
邊際機率	0.955	0.045	1.000

事後機率 P(列i|行j)、P(行j)

	良品	不良品
A	0.2890	0.5333
B	0.7110	0.4667
邊際機率	0.9550	0.0450

範例 2.21 （貝氏定理）

某箱子內有三種廠牌的電池且均是可用的。A 廠牌的電池能使用超過 200 小時的機率為 0.7，B 廠牌與 C 廠牌的電池的機率分別為 0.4 與 0.3。若箱內有 20%為 A 廠牌的電池、30%為 B 廠牌的電池且 50%為 C 廠牌的。隨機選取一個電池能使用超過 200 小時的機率為何？(105 初考)

(A) 0.36　(B) 0.41　(C) 0.51　(D) 0.82

答案: (B)

範例 2.21 （貝氏定理）(續)

【解】

事前機率 P(行j|列i)、P(列i)

	超過200 小於200	邊際機率
A	70%	0.2
B	40%	0.3
C	30%	

聯合機率

	超過200	小於200	邊際機率
A	0.2×70%	0.2×30%	0.200
	0.140	0.060	
B	0.3×40%	0.3×60%	0.300
	0.120	0.180	
C	0.5×30%	0.5×70%	0.500
	0.150	0.350	
邊際機率	0.410	0.590	1.000

事後機率 P(列i|行j)、P(行j)

	超過200	小於200
A	0.3415	0.1017
B	0.2927	0.3051
C	0.3659	0.5932
邊際機率	0.410	0.590

§5.1 一些貝氏定理的相關術語

貝氏定理廣泛用於流行病學的研究。以下相關術語盛行於該領域，在 cov-19 流行期間報章雜誌常出現以這些術語描述檢測試劑的文章。

假設對於 A+B+C+D 位民眾檢測是否感染某疾病，以及對某檢測的反應，其結果整理成如**圖 2.5** 的列聯表。就此列聯表的數據，我們定義以下比率數值。

(1)有關邊際機率：

$$\text{實際盛行率}=\frac{A+C}{A+B+C+D}\text{，}\quad\text{觀察盛行率}=\frac{A+B}{A+B+C+D}\text{。}$$

(2)有關事前機率：

$$\text{敏感度}=\frac{A}{A+C}\text{，}\quad\text{特異度}=\frac{D}{B+D}\text{，}\quad\text{偽陰性}=\frac{C}{A+C}\text{，}\quad\text{偽陽性}=\frac{B}{B+D}\text{。}$$

(3)有關事後機率：

$$\text{陽性預測值}=\frac{A}{A+B}\text{，}\quad\text{陰性預測值}=\frac{D}{C+D}\text{。}$$

		檢查		
		陽性	陰性	總和
疾病	有	A	C	A+C
	無	B	D	B+D
	總和	A+B	C+D	A+B+C+D

圖 2.5 有無感染疾病與檢測結果之列聯表

		檢查		總和	
		陽性	陰性		
疾病	有	A	C	A+C	實際盛行率
	無	B	D	B+D	
	總和	A+B	C+D	A+B+C+D	
		觀察盛行率			

圖 2.6 有關邊際機率的比率值

		檢查		總和		
		陽性	陰性			
疾病	有	A	C	A+C	敏感度	偽陰性
	無	B	D	B+D	偽陽性	特異度
	總和	A+B	C+D	A+B+C+D		

圖 2.7 有有關事前機率的比率值

		檢查		總和
		陽性	陰性	
疾病	有	A	C	A+C
	無	B	D	B+D
	總和	A+B	C+D	A+B+C+D
		陽性預測性	陰性預測性	

圖 2.8 有關事後機率的比率值

The End