

《統計學(二)》 14 變異數分析

陳欣得

靜宜大學企管系

統計學目錄

第01章 緒論

第02章 資料的種類與資料的蒐集及衡量

第03章 整理資料-以統計表統計圖呈現

第04章 分析資料-以統計測量數呈現

第05章 機率論

第06章 間斷隨機變數及其常用的機率分配

第07章 連續隨機變數及其常用的機率分配

第08章 二元隨機變數及其機率分配

第09章 簡單隨機抽樣與抽樣分配

第10章 統計估計-點估計

第11章 統計估計-區間估計

第12章 假設檢定

第13章 兩母體的統計估計與假設檢定

第14章 變異數分析

第15章 簡單迴歸分析與相關分析

第16章 複迴歸分析與相關分析

第17章 迴歸分析的一些問題

第18章 類別資料的分析-卡方檢定

第19章 無母數統計檢定

第20章 時間數列分析與預測

第21章 指數

第22章 抽樣與估計方法

14變異數分析－大綱

章節安排：

- §1 變異數分析概論
- §2 單因子變異數分析
- §3 多重比較
- §4 雙因子變異數分析
- §5 有交互影響的雙因子變異數分析
- §6 變異數分析與兩母體平均數差的檢定
- §7 實驗設計

§1 變異數分析概論

- 變異數分析 (Analysis Of Variance, ANOVA)
 - ◆ 一種假設檢定的特殊型態。
 - ◆ 這是一種三組或三組以上母體平均數是否相等的假設檢定。

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k, \quad k \geq 3$$
 - ◆ ANOVA的基本想法是將總變異數分成兩部分；與虛無假設有關係的**可解釋變異**、以及與虛無假設無關的**不可解釋變異**，一般若虛無假設為真，則可解釋變異應為零。
 - ◆ 對兩組變異數的檢定，我們有F分配可以用（可解釋變異在分子、不可解釋變異在分母）。
 - ◆ 更進一步來說，ANOVA一律是右尾檢定（為什麼？）。

補充計算題-1

(109 普考經建) 五、欲比較三種不同品牌的電池其平均壽命是否一致，每種品牌電池各隨機抽測 5 顆電池並記錄其壽命。這三組樣本其壽命的平均值分別為 3、4.5 及 3.6，而其壽命的標準差分別為 1.5、1 及 1.5。在顯著水準 $\alpha = 0.05$ ，請利用單因子變異數分析法 (one-way ANOVA) 來檢定這三種品牌電池平均壽命是否一致，即檢定：

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 對 $H_1 : \mu_1, \mu_2$ 及 μ_3 並不完全相等。

其中 μ_1, μ_2 及 μ_3 分別是這三種品牌電池的平均壽命。(10 分)

- ◆ 三組的平均分別為3、4.5、3.6，總平均為3.7。其變異量：

$$MS = \frac{(3-3.7)^2 + (4.5-3.7)^2 + (3.6-3.7)^2}{3} = 0.38$$

若此變異量越小，則越支持 H_0 的成立。

問題是如何判斷這個變異量夠不夠小？

- ◆ 第二組變異量：三組測量的標準差分別為1.5、1、與1.5。

組間變異、組內變異

令觀察值為 x_{ij} ， $i=1, \dots, n_j$ ， $j=1, \dots, k$ ，其中，一共有 k 組觀察值，而 n_j 為第 j 組的觀察值數目。以下是所有觀察值的均差平方和

$$\begin{aligned} \sum_{ij} (x_{ij} - \mu)^2 &= \sum_{ij} (x_{ij} - \mu_j + \mu_j - \mu)^2 \\ &= \sum_j \sum_i (\mu_j - \mu)^2 + \sum_j \sum_i (x_{ij} - \mu_j)^2 \\ &= \sum_j n_j (\mu_j - \mu)^2 + \sum_j \sum_i (x_{ij} - \mu_j)^2 \end{aligned}$$

即

總均差平方和 = 組間均差平方和 + 組內均差平方和

$$SST = SSB + SSW$$

其中， μ 為總平均數， μ_j 為第 j 組的平均數。在虛無假設成立的狀況下，組間均差平方和應為零， $SSB = 0$ 。

幾個均差平方和的中英文名詞如下：

總均差平方和 (total sum of square, *SST*)

組間均差平方和 (sum of square between groups, *SSB*)

組內均差平方和 (sum of square within groups, *SSW*)

為方便起見，我們常稱之為**總變異**、**組間變異**、與**組內變異**，即

$$\text{總變異} = \text{組間變異} + \text{組內變異}$$

另外，組間變異與虛無假設有關係，又稱為**處置變異**(sum of square of treatment, *SSTR*)

或**可解釋變異**；相對地，組內變異又稱為**誤差變異**(sum of square of error, *SSE*)、**隨機變異**、或**不可解釋變異**。

典型的變異數分析的檢定統計量為：

$$F = \frac{\text{可解釋變異數}}{\text{不可解釋變異數}} = \frac{SSTR/(k-1)}{SSE/(N-k)} = \frac{MSTR}{MSE}$$

其中， $N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ ，而 *MSTR* 稱為**處置均方和**(mean sum of square of treatment)

MSE 稱為**誤差均方和**(mean sum of square of error)。

ANOVA假設檢定

變異數分析就是假設檢定，其虛無假設一律為：

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k, \quad k \geq 3$$

其檢定統計量一律為

$$F = \frac{SSTR/(k-1)}{SSE/(N-k)} = \frac{MSTR}{MSE}, \quad \text{自由度 } df = (k-1, N-k), \quad \text{右尾檢定}$$

我們真正要作的是計算樣本的 $MSTR$ 與 MSE ，也就是計算樣本檢定統計量值。因為這兩個數值的計算過程比一般假設檢定繁複，我們用**變異數分析表 (ANOVA table)** 來整合計算過程。

變異數分析表

以下是變異數分析表：

Source of Variation	Sum of Squares	Degree of Freedom	Mean Square	F
Treatments	SSTR	k-1	MSTR = SSTR / k-1	F = MSTR / MSE
Error	SSE	N-k	MSE = SSE / N-k	
Total	SST	N-1		

變異來源	平方和	自由度	均方和	F
組間變異	SSTR	k-1	MSTR = SSTR / k-1	F = MSTR / MSE
組內變異	SSE	N-k	MSE = SSE / N-k	
總變異	SST	N-1		

請注意表內各項數值間的關係。一般只要知道其中四項，其他各項就可以用相互間的關係推算出來。

範例1 (變異數分析表)

就以下變異數分析表，請推求出表中其他數值：

變異來源	平方和	自由度	均方和	F
處置變異	44.16	2		
組內變異				
總變異	53.71	13		

【解】

$$SSE = SST - SSTR = 53.71 - 44.16 = 9.55 \quad N - k = (N - 1) - (k - 1) = 13 - 2 = 11$$

$$MSTR = \frac{SSTR}{k - 1} = \frac{44.16}{2} = 22.08 \quad MSE = \frac{SSE}{N - k} = \frac{9.55}{11} = 0.87$$

$$F = \frac{MSTR}{MSE} = \frac{22.08}{0.87} = 24.435$$

變異來源	平方和	自由度	均方和	F
處置變異	44.16	2	22.08	24.435
組內變異	9.55	11	0.87	
總變異	53.71	13		

F分配的性質

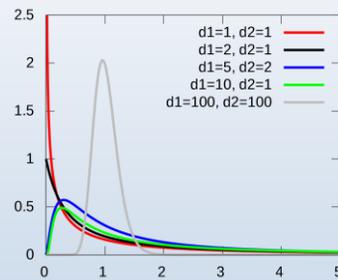
F分配的參數： d_1 、 d_2 (分子、分母自由度)

機率密度函數：

$$f(x) = \frac{1}{B\left(\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2}\right)} \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{\frac{d_1}{2}} x^{\frac{d_1}{2}-1} \left(1 + \frac{d_1}{d_2}x\right)^{-\frac{d_1+d_2}{2}}$$

$$E(x) = \frac{d_2}{d_2 - 2}, \quad d_2 > 2$$

$$\text{var}(x) = \frac{2d_2^2(d_1 + d_2 - 2)}{d_1(d_2 - 2)(d_2 - 4)}, \quad d_2 > 4$$



$$F = \frac{\frac{s_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{s_2^2}{\sigma_2^2}} = \frac{s_1^2}{s_2^2} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$$

$$\text{若 } \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \Rightarrow F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

F 分配右尾臨界值表

n2 \ n1	α = 0.05																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	20	25	30	40	60	120	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.0	243.9	245.9	248.0	249.3	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.330	19.353	19.371	19.385	19.396	19.405	19.413	19.429	19.446	19.456	19.462	19.471	19.479	19.487	19.496
3	10.128	9.552	9.277	9.117	9.013	8.941	8.887	8.845	8.812	8.786	8.763	8.745	8.703	8.660	8.634	8.617	8.594	8.572	8.549	8.526
4	7.709	6.944	6.591	6.388	6.256	6.163	6.094	6.041	5.999	5.964	5.936	5.912	5.858	5.803	5.769	5.746	5.717	5.688	5.658	5.628
5	6.608	5.786	5.409	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.772	4.735	4.704	4.677	4.6188	4.5581	4.5209	4.4957	4.4638	4.4314	4.3985	4.3650
6	5.987	5.143	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.0990	4.0600	4.0274	3.9999	3.9381	3.8742	3.8348	3.8082	3.7743	3.7398	3.7047	3.6689
7	5.591	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767	3.6365	3.6030	3.5747	3.5107	3.4445	3.4066	3.3758	3.3404	3.3043	3.2674	3.2298
8	5.318	4.4590	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881	3.3472	3.3130	3.2839	3.2184	3.1503	3.1081	3.0794	3.0428	3.0053	2.9669	2.9276
9	5.117	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789	3.1373	3.1025	3.0729	3.0061	2.9365	2.8932	2.8637	2.8259	2.7872	2.7475	2.7067
10	4.965	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204	2.9782	2.9430	2.9130	2.8450	2.7740	2.7298	2.6996	2.6609	2.6211	2.5801	2.5379
11	4.843	3.9823	3.5874	3.3567	3.2039	3.0946	3.0123	2.9480	2.8962	2.8536	2.8179	2.7876	2.7186	2.6464	2.6014	2.5705	2.5309	2.4901	2.4480	2.4045
12	4.742	3.8853	3.4903	3.2592	3.1059	2.9961	2.9134	2.8486	2.7964	2.7534	2.7173	2.6866	2.6169	2.5436	2.4977	2.4663	2.4259	2.3842	2.3410	2.2962
13	4.662	3.8056	3.4105	3.1791	3.0254	2.9153	2.8321	2.7669	2.7144	2.6710	2.6347	2.6037	2.5331	2.4589	2.4123	2.3803	2.3392	2.2966	2.2524	2.2064
14	4.601	3.7389	3.3439	3.1122	2.9582	2.8477	2.7642	2.6987	2.6458	2.6022	2.5655	2.5342	2.4630	2.3879	2.3407	2.3082	2.2664	2.2229	2.1778	2.1307
15	4.5431	3.6823	3.2874	3.0556	2.9013	2.7905	2.7066	2.6408	2.5876	2.5437	2.5068	2.4753	2.4034	2.3275	2.2797	2.2468	2.2043	2.1601	2.1141	2.0658
16	4.4940	3.6337	3.2389	3.0069	2.8524	2.7413	2.6572	2.5911	2.5377	2.4935	2.4564	2.4247	2.3522	2.2756	2.2272	2.1938	2.1507	2.1058	2.0589	2.0096
17	4.4513	3.5915	3.1968	2.9647	2.8100	2.6987	2.6143	2.5480	2.4943	2.4499	2.4126	2.3807	2.3077	2.2304	2.1815	2.1477	2.1040	2.0584	2.0107	1.9604
18	4.4139	3.5546	3.1599	2.9277	2.7729	2.6613	2.5767	2.5102	2.4563	2.4117	2.3742	2.3421	2.2686	2.1906	2.1413	2.1071	2.0629	2.0166	1.9681	1.9168
19	4.3807	3.5219	3.1274	2.8951	2.7401	2.6283	2.5435	2.4768	2.4227	2.3779	2.3402	2.3080	2.2341	2.1555	2.1057	2.0712	2.0264	1.9795	1.9302	1.8780
20	4.3512	3.4928	3.0984	2.8661	2.7109	2.5990	2.5140	2.4471	2.3928	2.3479	2.3100	2.2776	2.2033	2.1242	2.0739	2.0391	1.9938	1.9464	1.8963	1.8432
21	4.3248	3.4668	3.0725	2.8401	2.6848	2.5727	2.4876	2.4205	2.3660	2.3210	2.2829	2.2504	2.1757	2.0960	2.0454	2.0102	1.9645	1.9165	1.8657	1.8117
22	4.3009	3.4434	3.0491	2.8167	2.6613	2.5491	2.4638	2.3965	2.3419	2.2967	2.2585	2.2258	2.1508	2.0707	2.0196	1.9842	1.9380	1.8894	1.8380	1.7831
23	4.2793	3.4221	3.0278	2.7955	2.6400	2.5277	2.4422	2.3748	2.3201	2.2747	2.2364	2.2036	2.1282	2.0476	1.9963	1.9605	1.9139	1.8648	1.8128	1.7570
24	4.2597	3.4028	3.0088	2.7763	2.6207	2.5082	2.4226	2.3551	2.3002	2.2547	2.2163	2.1834	2.1077	2.0267	1.9750	1.9390	1.8920	1.8424	1.7896	1.7330
25	4.2417	3.3852	2.9912	2.7587	2.6030	2.4904	2.4047	2.3371	2.2821	2.2365	2.1979	2.1649	2.0889	2.0075	1.9554	1.9192	1.8718	1.8217	1.7684	1.7110
26	4.2252	3.3690	2.9752	2.7426	2.5868	2.4741	2.3883	2.3205	2.2655	2.2197	2.1811	2.1479	2.0716	1.9898	1.9375	1.9010	1.8533	1.8027	1.7488	1.6906
27	4.2100	3.3541	2.9604	2.7278	2.5719	2.4591	2.3732	2.3053	2.2501	2.2043	2.1655	2.1323	2.0558	1.9736	1.9210	1.8842	1.8361	1.7851	1.7306	1.6717
28	4.1960	3.3404	2.9467	2.7141	2.5581	2.4453	2.3593	2.2913	2.2360	2.1900	2.1512	2.1179	2.0411	1.9586	1.9057	1.8687	1.8203	1.7689	1.7138	1.6541
29	4.1830	3.3277	2.9340	2.7014	2.5454	2.4324	2.3463	2.2783	2.2229	2.1768	2.1379	2.1045	2.0275	1.9446	1.8915	1.8543	1.8055	1.7537	1.6981	1.6376
30	4.1709	3.3158	2.9223	2.6896	2.5336	2.4205	2.3343	2.2662	2.2107	2.1646	2.1256	2.0921	2.0148	1.9317	1.8782	1.8409	1.7918	1.7396	1.6835	1.6223
40	4.0847	3.2317	2.8387	2.6060	2.4495	2.3359	2.2490	2.1802	2.1240	2.0772	2.0376	2.0035	1.9245	1.8389	1.7835	1.7444	1.6928	1.6373	1.5766	1.5089
60	4.0012	3.1504	2.7581	2.5252	2.3683	2.2541	2.1665	2.0970	2.0401	1.9926	1.9522	1.9174	1.8364	1.7480	1.6902	1.6491	1.5943	1.5343	1.4673	1.3893
120	3.9201	3.0718	2.6802	2.4472	2.2899	2.1750	2.0868	2.0164	1.9588	1.9105	1.8693	1.8337	1.7505	1.6587	1.5980	1.5543	1.4952	1.4290	1.3519	1.2539
∞	3.8415	2.9957	2.6049	2.3719	2.2141	2.0986	2.0096	1.9384	1.8799	1.8307	1.7886	1.7522	1.6664	1.5705	1.5061	1.4591	1.3940	1.3180	1.2214	1.0000

變異數分析的假設

- (1)各組母體均為常態分配
- (2)各組母體的標準差相等： $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_k$
- (3)各組母體互相獨立

三類變異數分析

- (1) 單因子變異數分析
- (2) 雙因子變異數分析
- (3) 有交互影響的雙因子變異數分析

§2 單因子變異數分析

只從總變異中抽取出一組可解釋變異：

$$\begin{aligned}\sum_{ij} (x_{ij} - \bar{x})^2 &= \sum_{ij} (x_{ij} - \bar{x}_j + \bar{x}_j - \bar{x})^2 \\ &= \sum_j \sum_i (\bar{x}_j - \bar{x})^2 + \sum_j \sum_i (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 \\ &= \sum_j n_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2 + \sum_j \sum_i (x_{ij} - \bar{x}_j)^2\end{aligned}$$

總變異 = 組間變異 + 組內變異

$$SST = SSTR + SSE$$

其中

$$\begin{aligned}SST &= \sum_{ij} (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{ij} x_{ij}^2 - n\bar{x}^2 = \sum_{ij} x_{ij}^2 - \frac{(\sum x_{ij})^2}{N} \\ SSTR &= \sum_j \sum_i (\bar{x}_j - \bar{x})^2 = \sum_j n_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2 = n_1 \bar{x}_1^2 + n_2 \bar{x}_2^2 + \cdots + n_k \bar{x}_k^2 - N\bar{x}^2 \\ SSE &= SST - SSTR\end{aligned}$$

也就是說，我們可以用下列公式計算 SST 與 $SSTR$ ：

$$SSTR = \frac{(\Sigma A_1)^2}{n_1} + \frac{(\Sigma A_2)^2}{n_2} + \dots + \frac{(\Sigma A_k)^2}{n_k} - \frac{(\Sigma T)^2}{N}$$

$$SST = \Sigma x^2 - \frac{(\Sigma T)^2}{N}$$

$$SST = SSTR + SSE$$

其中

ΣA_j 為第 j 因子（行）觀察值之和

ΣT 為全部觀察值之和

Σx^2 為全部觀察值之平方和

範例2（單因子ANOVA）

給定資料：

A	B	C
10	8	7
11	9	8
12	10	6
10	8	7
12		6

將資料作以下整理：

	A	B	C	合計
	10	8	7	
	11	9	8	
	12	10	6	
	10	8	7	
	12		6	
ΣA	55	35	34	124
n_A	5	4	5	14
$(\Sigma A)^2/n_A$	605	306.25	231.2	1142.45

χ^2	A	B	C	合計
	100	64	49	
	121	81	64	
	144	100	36	
	100	64	49	
	144		36	
合計	609	309	234	1152

整理成變異數分析表如下：

變異來源	平方和	自由度	均方和	F
處置變異	44.16	2	22.08	25.435
組內變異	9.55	11	0.87	
總變異	53.71	13		

其中

$$k = 3, \quad n_A = 5, n_B = 4, n_C = 5, \quad N = n_A + n_B + n_C = 14$$

$$SSTR = 1,142.45 - \frac{(124)^2}{14} = 44.16$$

$$SST = 1,152 - \frac{(124)^2}{14} = 53.71$$

$$SSE = SST - SSTR = 53.71 - 44.16 = 9.55$$

假設檢定：

變異來源	平方和	自由度	均方和	F
處置變異	44.16	2	22.08	25.435
組內變異	9.55	11	0.87	
總變異	53.71	13		

(1) $H_0: \mu_A = \mu_B = \mu_C$ (右尾檢定)

(2) 檢定統計量 $F = \frac{MSTR}{MSE}$ 為自由度(2,11)的 F 分配

(3) 右尾檢定，自由度(2,11)的 F 分配， $\alpha = 0.05$ ，拒絕區域 $R = \{F > 3.9823\}$

(4) 樣本檢定統計量 $F = \frac{MSTR}{MSE} = 25.43 \in R$ ，拒絕 H_0

(5) 三組的平均數不完全相等。

補充計算題-2

(108 五等特考)變 14、在一個工業生產製程中，使用變異數分析來比較不同溫度下之機器生產的產量是否相同。以下資料為工廠隨機選取 15 台生產機器並分別在三種不同溫度下所生產的產品數目：

攝氏 50 度	攝氏 60 度	攝氏 70 度
34	30	23
24	31	28
26	34	28
29	23	30
32	27	31

已知處理 (treatment) 平方和 $SS_{TR} = 70$ ，誤差 (Error) 平方和 $SSE = 236$ 。

請寫出變異數分析表，並執行假設檢定。

變異來源	平方和	自由度	均方	F
組間	70	2		
隨機	236	12		
總和				

⇒

變異來源	平方和	自由度	均方	F	p 值
組間	70	2	35	1.7797	0.2104
隨機	236	12	19.67		
總和	306	14			

§3 多重比較

在 ANOVA 中，若拒絕虛無假設，意味著各組平均數不完全相等。
此時，我們有興趣知道與眾不同的哪一組？

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \text{ 不成立} \Rightarrow \mu_1 \neq \mu_2, \mu_1 \neq \mu_3, \text{ or } \mu_2 \neq \mu_3?$$

多重比較 — 事後檢定

母體標準差的估計

ANOVA 假設各組母體標準差皆相等，令其為 σ 。

σ 的最佳估計量為 \sqrt{MSE} 。

檢定兩組平均數是否相等 (Fisher's LSD)

虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2$

檢定統計量 $t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{MSE(1/n_1 + 1/n_2)}}$ ，自由度 $df = N - k$

$LSD_{1,2} = t_{\frac{\alpha}{2}, N-k} \times \sqrt{MSE \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}$ 。若 $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| > LSD_{1,2}$ ，則拒絕 H_0 。

節省時間的做法

事後檢定：信賴區間

各分組的信賴區間 $CI_A = \left\{ \bar{x}_A \pm t_{df=N-k} \sqrt{MSE/n_A} \right\}$, $A=1, \dots, k$

若 $CI_A \cap CI_B = \emptyset$ ，則拒絕 $H_0: \mu_A = \mu_B$ 。

事後檢定：顯著性差異 (Tukey HSD)

顯著性差異 $HSD = q_{df=(k, N-k)} \sqrt{MSE/n_A}$, $n_A = n_1 = n_2 = \dots = n_k = N/k$

若 $|\bar{x}_A - \bar{x}_B| > HSD$ ，則拒絕 $H_0: \mu_A = \mu_B$ 。

事後檢定：兩兩(多重)檢定 (Scheffe's method)

配對的信賴區間 $CI_{A-B} = \left\{ |\bar{x}_A - \bar{x}_B| \pm \sqrt{(k-1)F_{\alpha, df=(k-1, N-k)}} \sqrt{MSE \left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B} \right)} \right\}$

若 $0 \notin CI_{A-B}$ ，則拒絕 $H_0: \mu_A = \mu_B$ 。

成對檢定：

變異來源	平方和	自由度	均方和	F
處置變異	44.16	2	22.08	25.435
組內變異	9.55	11	0.87	
總變異	53.71	13		

(1) $H_0: \mu_A = \mu_B$ (雙尾檢定)

(2) 檢定統計量 $t = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{\sqrt{MSE\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right)}}$ 為自由度11的 t 分配

(3) 雙尾檢定、自由度 11 的 t 分配、 $\alpha = 0.05$ ，拒絕區域 $R = \{t < -2.201, t > 2.201\}$

(4) 樣本檢定統計量 $t = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{\sqrt{MSE\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right)}} = \frac{\frac{55}{5} - \frac{35}{4}}{\sqrt{0.87 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right)}} = 3.5960 \in R$ ，拒絕 H_0

(5) A、B 兩組的平均數不相等。

成對檢定 (信賴區間法)：

變異來源	平方和	自由度	均方和	F
處置變異	44.16	2	22.08	25.435
組內變異	9.55	11	0.87	
總變異	53.71	13		

$$CI_{\mu_A} = \left\{ \frac{55}{5} \pm 2.201 \times \sqrt{0.87/5} \right\} = \{10.083 \leq \mu_A \leq 11.917\}$$

$$CI_{\mu_B} = \left\{ \frac{35}{4} \pm 2.201 \times \sqrt{0.87/4} \right\} = \{7.725 \leq \mu_B \leq 9.775\}$$

$$CI_{\mu_C} = \left\{ \frac{34}{5} \pm 2.201 \times \sqrt{0.87/5} \right\} = \{5.883 \leq \mu_C \leq 7.717\}$$

因 $CI_{\mu_A} \cap CI_{\mu_B} = \emptyset$ ，故可推論在 $\alpha = 0.05$ 下會拒絕 $H_0: \mu_A = \mu_B$ 。同理，虛無假設 $H_0: \mu_A = \mu_C$ 與 $H_0: \mu_B = \mu_C$ 也都不會成立。

§4 雙因子變異數分析

原始資料有兩種分組方法：

處置變異 (Treatments Variation, $SSTR$)：主要分組 (共分 k 組)

集區變異 (Block Variables, $SSBK$)：次要分組 (共分 b 組)

將單因子變異數分析中的隨機變異分離出集群 (列) 因子的影響 (變異)：

總變異 = 處置變異 + (隨機變異) = 處置變異 + 集區變異 + 隨機變異

$$SST = SSTR + SSBK + SSE$$

計算公式如下：

$$SST = \sum x^2 - \frac{(\sum T)^2}{N}$$

$$SSTR = \frac{(\sum A_1)^2}{b} + \frac{(\sum A_2)^2}{b} + \dots + \frac{(\sum A_k)^2}{b} - \frac{(\sum T)^2}{N}$$

$$SSBK = \frac{(\sum B_1)^2}{k} + \frac{(\sum B_2)^2}{k} + \dots + \frac{(\sum B_b)^2}{k} - \frac{(\sum T)^2}{N}$$

$$SSE = SST - SSTR - SSBK$$

其中

$\sum A_j$ 為第 j 行觀察值之和

$\sum B_i$ 為第 i 列觀察值之和

$\sum T$ 為全部觀察值之和

$\sum x^2$ 為全部觀察值之平方和

有兩組檢定：

$$F_{TR} = \frac{MSTR}{MSE} = \frac{SSTR/(k-1)}{SSE/(k-1)(b-1)} : \text{檢測主要分組（處置）平均數是否完全相等}$$

$$F_{BK} = \frac{MSBK}{MSE} = \frac{SSBK/(b-1)}{SSE/(k-1)(b-1)} : \text{檢測次要分組（集區）平均數是否完全相等}$$

變異數分析表如下：

Source of Variation	Sum of Squares	Degree of Freedom	Mean Square	F
Treatments	SSTR	k-1	MSTR = SSTR / k-1	$F_{TR} = MSTR / MSE$
Blocks	SSBK	b-1	MSBK = SSBK / b-1	$F_{BK} = MSBK / MSE$
Error	SSE	(k-1)(b-1)	MSE = SSE / (k-1)(b-1)	
Total	SST	N-1		

變異來源	平方和	自由度	均方和	F
處置變異	SSTR	k-1	MSTR = SSTR / k-1	$F_{TR} = MSTR / MSE$
集區變異	SSBK	b-1	MSBK = SSBK / b-1	$F_{BK} = MSBK / MSE$
組內變異	SSE	(k-1)(b-1)	MSE = SSE / (k-1)(b-1)	
總變異	SST	N-1		

範例3 (雙因子ANOVA)

給定資料：

	A1	A2	A2
B1	7	9	12
B2	11	12	14
B3	13	11	8
B4	8	9	7
B5	9	10	13

【解】

將資料作以下整理：

	A1	A2	A2	ΣB	n_B	$(\Sigma B)^2/k$
B1	7	9	12	28	3	261.3
B2	11	12	14	37	3	456.3
B3	13	11	8	32	3	341.3
B4	8	9	7	24	3	192.0
B5	9	10	13	32	3	341.3
ΣA	48	51	54	153	15	1592.3
n_A	5	5	5	15		
$(\Sigma A)^2/b$	460.8	520.2	583.2	1564.2		

x^2	A1	A2	A2	合計
B1	49	81	144	274
B2	121	144	196	461
B3	169	121	64	354
B4	64	81	49	194
B5	81	100	169	350
合計				1633

整理成變異數分析表如下：

變異來源	平方和	自由度	均方和	F
處置變異	3.60	2	1.80	0.388
處置變異	31.73	4	7.93	1.712
組內變異	37.07	8	4.63	
總變異	72.40	14		

其中

$$k = 3, b = 5, N = kb = 15$$

$$SSTR = 1,564.2 - \frac{(153)^2}{15} = 3.6$$

$$SSBK = 1,592.3 - \frac{(153)^2}{15} = 31.73$$

$$SST = 1,633 - \frac{(153)^2}{15} = 72.40$$

$$SSE = SST - SSTR - SSBK = 37.07$$

檢定處置間平均數是否相等：

- (1) $H_0: \mu_A = \mu_B = \mu_C$ (右尾檢定)
- (2) 檢定統計量 $MSTR/MSE$ 為自由度 $(df_{TR}, df_E) = (2, 8)$ 的 F 分配
- (3) 右尾檢定，自由度 $(2, 8)$ 的 F 分配， $\alpha = 0.05$ ，拒絕區域 $R = \{F > 4.4590\}$
- (4) 樣本檢定統計量 $MSTR/MSE = 0.388 \notin R$ ，無法拒絕虛無假設
- (5) 各處置分組的平均數相等。

檢定集區間平均數是否相等：

- (1) $H_0: \mu_{b1} = \mu_{b2} = \mu_{b3} = \mu_{b4} = \mu_{b5}$ (右尾檢定)
- (2) 檢定統計量 $MSBK/MSE$ 為自由度 $(df_{BK}, df_E) = (4, 8)$ 的 F 分配
- (3) 右尾檢定，自由度 $(4, 8)$ 的 F 分配， $\alpha = 0.05$ ，拒絕區域 $R = \{F > 3.8379\}$
- (4) 樣本檢定統計量 $MSBK/MSE = 1.712 \notin R$ ，無法拒絕虛無假設
- (5) 各集區間的平均數相等。

補充計算題-3

(108 初考)變 21、這幾年來，食品輻照（food irradiation）常常被用來減少細菌數並且延長食物保存期限。提供此服務的某公司開發 4 種新的輻照方法。為了決定那一種方法減少細菌的效果較好，針對 5 種食物進行 4 種不同方式的輻照（稱為輻照 I-IV），同時記錄輻照後食物上的細菌數目。接受輻照的食物包括牛肉、雞肉、火雞肉、蛋與牛奶。資料如下：

食物	細菌數目			
	輻照 I	輻照 II	輻照 III	輻照 IV
牛肉	47	53	36	68
雞肉	53	61	48	75
火雞肉	68	85	55	45
蛋	25	24	20	27
牛奶	44	48	38	46

請執行雙因子變異數分析：

- (A) 寫出變異數分析表
- (B) 執行輻照因子假設檢定
- (C) 執行食物因子假設檢定

S5 有交互影響的雙因子變異數分析

雙因子變異數分析中的隨機變異再分離出兩因子間的交互影響（變異）：

總變異 = 行間變異 + 列間變異 + 交互影響變異 + 隨機變異

$$SST = SSA + SSB + SSAB + SSE$$

（這裡的 SSA 、 SSB 即上節的 $SSTR$ 、 $SSBK$ ）

計算公式如下：

$$SSA = \frac{(\sum A_1)^2}{n_{A_1}} + \frac{(\sum A_2)^2}{n_{A_2}} + \dots + \frac{(\sum A_a)^2}{n_{A_a}} - \frac{(\sum T)^2}{N}$$

$$SSB = \frac{(\sum B_1)^2}{n_{B_1}} + \frac{(\sum B_2)^2}{n_{B_2}} + \dots + \frac{(\sum B_b)^2}{n_{B_b}} - \frac{(\sum T)^2}{N}$$

$$SSE = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^a (\text{第 } ij \text{ 方格內之變異}) = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^a \left(x_{ij,1}^2 + x_{ij,2}^2 + \dots + x_{ij,n_{ij}}^2 - \frac{(\sum x_{ij})^2}{n_{ij}} \right)$$

$$SSAB = SST - SSA - SSB - SSE$$

原始資料中，每一個實驗方格需有一個以上的觀察值。

(在單因子 ANOVA-隨機集區設計中，每一方格恰好有一個觀察值。)

有三組檢定：

$$F_A = \frac{MSA}{MSE} = \frac{SSA/(a-1)}{SSE/(N-ab)} : \text{檢測主要分組 (行因子) 平均數是否完全相等}$$

$$F_B = \frac{MSB}{MSE} = \frac{SSB/(b-1)}{SSE/(N-ab)} : \text{檢測次要分組 (列因子) 平均數是否完全相等}$$

$$F_{AB} = \frac{MSAB}{MSE} = \frac{SSAB/(a-1)(b-1)}{SSE/(N-ab)} : \text{檢測兩因子間是否有交互影響}$$

變異數分析表如下：

變異來源	平方和	自由度	均方和	F
行因子變異	SSA	a-1	MSA = SSA / a-1	$F_A = MSA / MSE$
列因子變異	SSB	b-1	MSB = SSB / b-1	$F_B = MSB / MSE$
交互影響變異	SSAB	(a-1)(b-1)	MSAB = SSAB / (a-1)(b-1)	$F_{AB} = MSAB / MSE$
隨機變異	SSE	N-ab	MSE = SSE / (N-ab)	
總變異	SST	N-1		

範例4 (雙因子ANOVA)

1. 台大農場以 3 種不同品種(A、B、C)及 3 種不同施肥方式(甲、乙、丙)同時試驗，並測得玫瑰花的產量如下表：

品種	施肥方式	各區產量		
A	甲	64	71	67
	乙	72	73	71
	丙	76	84	90
B	甲	75	76	74
	乙	71	71	71
	丙	65	64	66
C	甲	57	67	62
	乙	59	71	65
	丙	61	77	69

假設此資料適合 ANOVA 分析，試以 $\alpha=0.05$ 檢定：

- (1) 品種不同會不會影響產量？
- (2) 施肥方式不同會不會影響產量？
- (3) 品種與施肥方式之間是否具有交互作用？

【解】

原始資料整理成以下標準形式：

x_{ij}	A			B			C		
甲	64	71	67	75	76	74	57	67	62
乙	72	73	71	71	71	71	59	71	65
丙	76	84	90	65	64	66	61	77	69

x_{ij}^2	A			B			C		
甲	4096	5041	4489	5625	5776	5476	3249	4489	3844
乙	5184	5329	5041	5041	5041	5041	3481	5041	4225
丙	5776	7056	8100	4225	4096	4356	3721	5929	4761

將每方格加總：

Σx_{ij}	A	B	C	ΣB	n_B	$(\Sigma B)^2/a$
甲	202	225	186	613	9	41752.1
乙	216	213	195	624	9	43264.0
丙	250	195	207	652	9	47233.8
ΣA	668	633	588	1889	27	132249.9
n_A	9	9	9	27		
$(\Sigma A)^2/b$	49580.4	44521.0	38416.0	132517.4		

Σx_{ij}^2	A	B	C	合計
甲	13626	16877	11582	42085
乙	15554	15123	12747	43424
丙	20932	12677	14411	48020
合計				133529

隨機變異	A	B	C	合計
甲	24.67	2.00	50.00	76.67
乙	2.00	0.00	72.00	74.00
丙	98.67	2.00	128.00	228.67
合計				379.33

$$\text{例如 甲A方格變異} = \Sigma x_{A甲}^2 - \frac{(\Sigma x_{A甲})^2}{n_{A甲}} = 13,626 - \frac{202^2}{3} = 24.67$$

整理成以下變異數分析表：

變異來源	平方和	自由度	均方	F
A 因子	357.4	2	178.70	8.480
B 因子	89.9	2	44.93	2.132
交互作用	542.4	4	135.59	6.434
隨機	379.3	18	21.07	
總和	1369.0	26		

其中

$$a=3, b=5, n_{ij}=3, \forall i, j, n_{A_1}=n_{A_2}=n_{A_3}=n_{B_1}=n_{B_2}=n_{B_3}=9, N=3 \times 9=27$$

$$SSA = 132,517.4 - \frac{(1,889)^2}{27} = 375.4$$

$$SSB = 132,249.9 - \frac{(1,889)^2}{27} = 89.9$$

$$SSE = 379.3$$

$$SST = 133,529 - \frac{(1,889)^2}{27} = 1,369.0$$

$$SSAB = SST - SSA - SSB - SSE = 542.4$$

假設檢定(a)

右尾檢定，自由度(2,18)的 F 分配， $\alpha = 0.05$ ，拒絕區域 $R = \{F > 3.5546\}$

樣本檢定統計量 $F_A = 8.480 \in R$ ，拒絕虛無假設 H_0

品種的不同會影響產量。

假設檢定(b)

右尾檢定，自由度(2,18)的 F 分配， $\alpha = 0.05$ ，拒絕區域 $R = \{F > 3.5546\}$

樣本檢定統計量 $F_B = 2.132 \notin R$ ，無法拒絕虛無假設 H_0

施肥方式不會影響產量。

假設檢定(c)

右尾檢定，自由度(4,18)的 F 分配， $\alpha = 0.05$ ，拒絕區域 $R = \{F > 2.9277\}$

樣本檢定統計量 $F_A = 6.434 \in R$ ，拒絕虛無假設 H_0

品種與施肥方式有交互作用。

補充計算題-4

(108 初考)變 20、就以下二因子的因子實驗 (factorial experiment) 的變異數分析表——選擇何者錯誤？(顯著水準 $\alpha = 0.05$)

變異來源	平方和	自由度	MS	F	F 關鍵值
因子 A	184.333	2	92.167		3.555
因子 B	28.167	1			4.414
交互項 AB	8.333	2			3.555
誤差	185.0	18	10.278		
全部	405.833	23			

MS: mean square; F:檢定統計量;

請執行以下假設檢定：

- (A) A 因子效應是否存在
- (B) B 因子效應是否存在
- (C)交互項 AB 的效應是否存在

§6 變異數分析與兩母體平均數差的檢定

兩母體平均數差的檢定：

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

若 $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 、 $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ，母體變異數未知但相等，即 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ ，則我們也可以用 ANOVA 來檢定。事實上，兩者完全一樣。

$$F_{k-1, N-k} = F_{1, n_1+n_2-2} = \frac{MSTR}{MSE} = \left(\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{MSE(1/n_1 + 1/n_2)}} \right)^2 = \left(\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{s_p^2(1/n_1 + 1/n_2)}} \right)^2 = t_{n_1+n_2-2}^2$$

§7 實驗設計

- 就實驗設計的觀點，ANOVA有以下分類：

- ◆ 完全隨機設計的單因子ANOVA
- ◆ 隨機集區設計的單因子ANOVA
- ◆ 沒有交互影響的雙因子ANOVA
- ◆ 有交互影響的雙因子ANOVA

其中，第二、三類完全相同。套用我們的分類則為：

- ◆ 單因子ANOVA
- ◆ 雙因子ANOVA
- ◆ 雙因子ANOVA
- ◆ 有交互影響的雙因子ANOVA

1. (108 初考)變 20、就以下二因子的因子實驗 (factorial experiment) 的變異數分析表，選擇何者錯誤？(顯著水準 $\alpha = 0.05$)

變異來源	平方和	自由度	MS	F	F 關鍵值
因子 A	184.333	2	92.167		3.555
因子 B	28.167	1			4.414
交互項 AB	8.333	2			3.555
誤差	185.0	18	10.278		
全部	405.833	23			

MS: mean square; F:檢定統計量;

- (A)交互項 AB 的效應不存在
 (B)因為交互項 AB 的效應不存在，所以適合檢定個別因子效應 (主效應)
 (C)A 因子效應存在
 (D)B 因子效應存在

答案：(D)

【解】

變因	平方和	自由度	均方值	F		變因	平方和	自由度	均方值	F	p	F*
因子A	184.333	2	92.167		==>	因子A	184.3	2	92.17	8.967	0.002	3.555
因子B	28.167	1				因子B	28.2	1	28.17	2.741	0.115	4.414
交互項AB	8.333	2				交互項AB	8.3	2	4.17	0.405	0.673	3.555
誤差	185	18	10.278			誤差	185.0	18	10.28			
全部						全部	405.8	23			$\alpha =$	0.05

1. (109 初考)變 18、某機構擬定四類員工的計畫，每計畫安排 8 位，並依年齡區分成 24~30 歲、30~40 歲二等。今欲驗收不同年齡對計畫的受訓反應，得到變異數分析表結果如下表，其中 $F_{0.05,1,24} = 4.26$ ， $F_{0.05,1,31} = 4.18$ ， $F_{0.05,3,24} = 3.01$ ， $F_{0.05,3,31} = 2.90$ 。試問下列何者錯誤？

變因	平方和	自由度	均方值
計畫	85.75	3	28.583
年齡	2	1	2
計畫×年齡	17.25	3	5.75
誤差	119	24	3.7188
總和	224	31	

- (A)在顯著水準 0.05 下，計畫間有顯著差異
 (B)在顯著水準 0.05 下，計畫和年齡並無交互作用
 (C)計畫間有顯著差異，其 p-value 會大於 0.05
 (D)此實驗設計稱為二因子複因子完全隨機設計 (completely randomized design)
 答案：(C)

【解】

變因	平方和	自由度	均方值	F	變因	平方和	自由度	均方值	F	p	F*
計畫	85.75	3			計畫	85.8	3	28.58	7.686	0.001	3.009
年齡	2	1			年齡	2.0	1	2.00	0.538	0.470	4.260
計畫×年齡					計畫×年齡	17.3	3	5.75	1.546	0.228	3.009
誤差	119	24	3.7188		誤差	119.0	24	3.72			
總和	224	31			總和	224.0	31			$\alpha =$	0.05

1. (109 初考)變 40、下列資料為隨機選取 10 位學生期末考統計分數與考試準備時間與變異數分析 (ANOVA) 表。空格處 (a, b, c, d, e) 依序為：

時數 X	7	9	6	12	6	8	8	9	10	7
分數 Y	62	77	57	85	63	75	82	87	87	68

ANOVA					
	自由度	SS	MS	F	顯著值
迴歸	1	804.062	804.062	<u>Ⓔ</u>	0.0020
殘差	<u>Ⓐ</u>	<u>Ⓒ</u>	<u>Ⓓ</u>		
總和	<u>Ⓑ</u>	1122.1			

- (A) (7, 8, 518.038, 74.055, 10.865)
 (B) (7, 8, 418.038, 59.720, 13.464)
 (C) (8, 9, 318.038, 39.755, 20.226)
 (D) (8, 9, 218.038, 27.255, 29.502)

答案：(C)

【解】

變因	平方和	自由度	均方值	F		p	F^*					
迴歸	804.062	1			==>	迴歸	804.1	1	804.06	20.226	0.002	5.318
誤差						誤差	318.0	8	39.75			
總和	1122.1	9				總和	1122.1	9			$\alpha =$	0.05

1. (110 初考)變 16. 下列為二因子變異數分析的部分輸出結果, 其中因子 A 有 4 群, 因子 B 有 5 群:

變因	平方和	自由度	均方值	F
因子 A	130			
因子 B				
交互作用	270			
誤差	480			
總和	1000	59		

如果要檢測因子 A 和因子 B 是否存在交互作用, 計算出來的檢定統計量 F 值等於多少?

- (A) 0.5625
 (B) 1.875
 (C) 3.608
 (D) 2.50

答案: (B)

【解】

變因	平方和	自由度	均方值	F		變因	平方和	自由度	均方值	F	p	F*
因子A	130	3			==>	因子A	130.0	3	43.33	3.611	0.021	2.839
因子B		4				因子B	390.0	4	30.00	2.500	0.058	2.606
交互作用	270					交互作用	270.0	12	22.50	1.875	0.068	2.003
誤差	480					誤差	480.0	40	12.00			
總和	1000	59				總和	1000.0	59			$\alpha =$	0.05

The End